RELAZIONI

• RELAZIONE BINARIA

Sia X un insieme non vuoto.

$$R = X \times X$$

dove $x \sim_R y \iff (x,y) \in R$

• RELAZIONE EQUIVALENZA

Sia R una relazione binaria su X. R e' relazione di equivalenza se:

- RIFLESSIVA $\forall x \in X,\ (x,x) \in R$
- SIMMETRICA $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$
- TRANSITIVA $\forall (x,y), (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$

• CLASSE DI EQUIVALENZA

Sia R una relazione di equivalenza.

$$[x] = \{ y : y \in R,\ y \sim x \}$$

$[x]$ e' la classe di equivalenza

x e' il rappresentante della classe

• INSIEME QUOZIENTE

Sia R una relazione di equivalenza su X.

$$X/R = \{ [x],\ \forall x \in X \}$$

Esiste la funzione π, PROIEZIONE sul QUOZIENTE:

$$\pi : X \to X/R \qquad \pi(x) = [x]$$

• PARTIZIONE

Una partizione di X e' un insieme $P(X) = \{ U \subset X \}$ quando:

- $\forall U \in P(X),\ U \neq \emptyset$
- $\forall U_1 U_2 \in P(X),\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- $\forall x \in X :\ x \in U \in P(X)$

Esiste una correlazione tra PARTIZIONE e INSIEME QUOZIENTE di X.

GRUPPI

- **GRUPPO**

Sia X un insieme non vuoto e $+$ un'operazione su X.

$(X, +)$ e' un gruppo se:

- $+$ ha la proprietà ASSOCIATIVA
- X ha un ELEMENTO NEUTRO per $+$
- $\forall x \in X$, $\exists -x \in X$, ovvero un INVERSO

Un gruppo è chiamato ABELIANO se l'operazione $+$ e' COMMUTATIVA.

- **ANELLO**

Un anello e' un insieme X con due operazioni $(X, +, \cdot)$ tale che:

- $(A, +)$ e' GRUPPO ABELIANO
- $(A, \cdot)$ ha ELEMENTO NEUTRO e ASSOCIATIVA
- $\forall x, y, z \in A \qquad x(y+z) = xy + xz$
- $\forall x, y, z \in A \qquad (y+z)x = yx + yz$

Se l'operazione $\cdot$ e' COMMUTATIVA allora e' un ANELLO COMMUTATIVO

- **CAMPO**

Sia A un anello commutativo. A' e' l'insieme degli invertibili per l'operazione $\cdot$. Allora

$$A' = A^* = A \setminus \{0\}$$

SPAZI VETTORIALI

- **SPAZIO VETTORIALE**

Sia K un campo, V un insieme non vuoto.

$(V, +, \cdot, K)$ è uno SPAZIO VETTORIALE se:

- $+ : V \times V \to V$, $(V, +)$ GRUPPO ABELIANO
- $\cdot : K \times V \to V$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $v, w \in V$
  - $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
  - $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
  - $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$
  - $1 \cdot v = v$

- **Es: spazi vettoriali**

- MATRICE (i)

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \ a_i \in \mathbb{K} \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

$$+ : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\cdot : \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \cdots \\ a_n b_n \end{pmatrix}$$

- MATRICE (ii)

$$M(m, n, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{K} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m \right\}$$

$$+ : [A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$$

$$\cdot : [A \cdot B]_{ij} = [A]_{ij} \cdot [B]_{ij}$$

- POLINOMI (iii)

$\mathbb{K}[t]$ è l'insieme dei polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$

- **APPLICAZIONI LINEARI**

Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, allora:

$$\underset{\text{LINEARE}}{f: V \to W} \iff \begin{cases} f(v+v') = f(v) + f(v') \\ f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{cases}$$

In particolare:

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{ f : V \to W, \ f \text{ LINEARE} \}$$

- **ISOMORFISMI**

Sia $f: V \to W$. f e' ISOMORFISMO se:

- f BIGETTIVA
- f LINEARE

- **ENDOMORFISMI**

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$$

In particolare $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ e' un ANELLO.

- **SOTTOSPAZI VETTORIALI**

Sia $W \subseteq V$. W e' sottospazio di V se:

- $\forall\, w, w' \in V$, $w + w' \in V$
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, w \in V$, $\lambda w \in V$

- **NUCLEO DI f**

$$\ker(f) = \{ x \in V \mid f(x) = 0 \}$$

- **IMMAGINE DI f**

$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in W \mid \exists\, x \in V \ \ f(x) = y \}$$

- **GENERATORI DI SOTTOSPAZI (span)**

Sia $\mathcal{F}(X) = \{ W \text{ sottospazi } V : \ X \subset W \}$, con $X \subset V$.

Allora:

$$\bigcap_{W \in \mathcal{F}(X)} W = \mathrm{span}(X)$$

- **COMBINAZIONI LINEARI (Comb)**

Sia $X \subset V$.

$$Comb(X) := \left\{ v \in V : \ v = \sum_{x \in X} a_x x \right\}$$

In particolare si dimostra:

$$span(X) = Comb(X)$$

1. $Comb(X) \in \mathcal{F}(X)$
   - $\hookrightarrow X \subset Comb(X)$
   - $\hookrightarrow Com(X)$ sottosp V
2. $\forall\ W \in \mathcal{F}(X)$, $Comb(X) \subset W$

- **SPAZIO FINITAMENTE GENERATO**

V e' spazio finitamente generato $\iff \exists X \subset V : \ span(X) = V$ con X finito

- **INDIPENDENZA LINEARE**

Sia X sottospazio di V.

Gli elementi di X sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\iff \quad 0 = \sum_{x \in X} a_x x$ solo per $a_i = 0 \quad \forall i \in X$

- **BASE di V**

Sia $X \subset V$ insieme ORDINATO. X e' una BASE di V

$\iff \quad V = span(X)$ e elementi X linearmente indipendenti

In particolare:

- $\{E^1, \dots E^k\}$
- $\{1, t, t^2, \dots t^k\}$

sono BASI CANONICHE

> PROPRIETA'

1. esiste una sola combinazione lineare di vettori di una base per ogni vettore di V spazio.
2. sia $Y = \{y_1, \dots y_n\}$ sottoinsieme finito e ordinato.
   I vettori di Y non sono linearm. indipendenti
   $\iff \quad \exists\, y_i$ tale che y_i espresso come comb. lineare di $y_1, \dots y_{i-1}$

> ALGORITMO di ESTRAZIONE

$X = \{x_1, \dots x_n\}$ sottinsieme ordinato di V che genera V.

Ad ogni passo p, $X_p = \{T_p \mid Y_p\}$ e inizialmente $X_0 = \{x_0 \mid x_1, \dots x_n\}$.

PASSO P consiste nel TEST $\quad x_p = Comb(T_{p-1})$?

- SI: $Y_p = Y_{p-1} \setminus \{x_p\}$
- NO: $Y_p = Y_{p-1} \setminus \{x_p\}$, $T_p = T_{p-1} \cup \{x_p\}$

Dopo n passi, T_n e' una BASE di V

> ALGORITMO di COMPLETAMENTO

Sia Z insieme di vettori linearm. indip., Y generatore V (con $Z \subset V, Y \subset V$).

Allora l'algoritmo di estrazione su $\{Z, Y\}$ porta ad una BASE di V.

• DIMENSIONE di V

La dimensione di V ($\dim V$) e' il numero di elementi delle basi di V.
E' un carattere INTRINSECO allo spazio vettoriale V.

> TEOREMI

1. Sia $Z = \{z_1, \dots z_k\} \subset V$ di vettori linearm. indipendenti
   Sia $X = \{x_1, \dots z_n\} \subset V$ tale che $\text{span}(X) = V$
   Allora $n \geq k$.
2. (Corollario) siano B, B' basi di V. Allora $|B| = |B'|$.

> PROPRIETA'

1. W sottospazio di V, $\dim V = n$ $\Rightarrow$ W finitamente generato, $\dim W \leq \dim V$
2. Se $\dim W = \dim V$ $\Leftrightarrow$ $W = V$
3. V, W due $\mathbb{K}$-spazi finitamente generati e ISOMORFI $\Leftrightarrow$ $\dim V = \dim W$
4. $\dim V = n$, $f : V \to W$ lineare $\Rightarrow$ $\text{Im}(f)$ finitam. generata e $\dim \text{Im} f \leq n$
5. $B = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V, $\{w_1, \dots w_n\} \subseteq W$ $\Rightarrow$ $\exists !\, f : V \to W$ lineare tale che $f(v_j) = w_j$ $j = 1, \dots, n$

   (se f fosse BIGETTIVA allora $\{w_1, \dots w_n\}$ base di W)

• COORDINATE del VETTORE (rispetto a base)

$$[*]_B : V \to \mathbb{K}^n$$

dove dato un vettore $v = \sum a_j v_j$ con $v_j \in B$

$$[v]_B = (a_1, a_2, \dots a_n)^t$$

Questa funzione e' un ISOMORFISMO in cui passo dal vettore alle coordinate.

> APPLICAZIONE

Sia $f \in \text{Hom}(V, W)$ dove B base V, D base W. Allora:

$$[*]_D \circ f \circ [*]_B^{-1} \in \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = M(n, m, \mathbb{K}) \qquad \begin{matrix} n = \dim V \\ m = \dim W \end{matrix}$$

- CONVERSIONE di BASI

> Relazione tra $[v]_B$ e $[v]_{B'}$ con B, B' basi di V.

Parto dalla funzione $id_V : V \to V$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "{[\ ]_B}"] & V \arrow[d, "{[\ ]_{B'}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "M^B_{B'}(id_V)"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

> Relazione tra $M^B_D(f)$ e $M^{B'}_{D'}(f)$, $f : V \to W$, B, B' basi V, D, D' basi W

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "{[\ ]_{B'}}"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_B}"] & W \arrow[r, "id_W"] \arrow[d, "{[\ ]_D}"] & W \arrow[d, "{[\ ]_{D'}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{B'}_B(id_V)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "M^B_D(f)"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "M^D_{D'}(id_W)"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

$\}\ f = id_W \circ f \circ id_V$

$\}\ M^{B'}_{D'}(f)$

$\Rightarrow \quad M^B_{B'}(id_V) \cdot M^{B'}_B(id_V) = M^B_B(id_V) = I_n$

quindi le matrici-conversione di base sono INVERTIBILI

$$M^B_{B'}(id_V) \in GL(n, \mathbb{K})$$

- RELATIVITA'

Sia V uno spazio $\mathbb{K}$-vettoriale, B base di V, $A \in GL(n, \mathbb{K})$

(1) $A = M^B_B(f)$ ovvero A e' una TRASFORMAZIONE dello spazio vettoriale

(2) $A = M^{B'}_B(id_V) = M^B_{B''}(id_V)$ ovvero A e' CAMBIAMENTO BASI, quindi cambia il SISTEMA di RIFERIMENTO

FORMULE sulle DIMENSIONI

- **DIMENSIONE e f LINEARE**

Sia V uno spazio vettoriale ed $f : V \to W$ lineare

$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

- (Corollario) $\dim V = \dim W$, $f : V \to W$ lineare

$$f \text{ e' INIETTIVA} \iff f \text{ e' SURGETTIVA}$$

- **FORMULA di GRASSMAN**

Siano W e U sottospazi vettoriali. Allora:

$$\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$$

- (Corollario) se $W + U = W \oplus U$ allora:

$$\dim(W+U) = \dim W + \dim U$$

$\Rightarrow$ Dim con f LINEARE $\cong$ Formula di Grassman

EQUIVALENZA DESTRA - SINISTRA

- Sia relazione su $Hom(V, W)$:

" $g \sim_{DS} f \iff \exists (h, k) \in GL(V) \times GL(W)$ tali che
$$g = k \circ f \circ h$$ "

La relazione di equivalenza destra - sinistra e' di EQUIVALENZA.

- Versione matriciale su $M(m, n, \mathbb{K})$

" $B \sim_{DS} A \iff \exists (P, Q) \in GL(n, \mathbb{K}) \times GL(m, \mathbb{K})$
tali che $B = QAP$ "

- CARATTERIZZAZIONE equivalenza DS

① $g \sim_{DS} f$

② $\forall (B, D)$ basi di V e W: $M_D^B(g) \sim_{DS} M_D^B(f)$

③ $\exists (B, D)$ basi di V e W: $M_D^B(g) \sim_{DS} M_D^B(f)$

④ $\exists (B, D), (B', D')$ basi V, W: $M_D^B(g) = M_{D'}^{B'}(f)$

- INVARIANTE per equivalenza DS

$\dim Im(g) = \dim Im(f) \iff g \sim_{DS} f$

in particolare e' un invariante COMPLETO per l'implicazione "se e solo se".

> Nel caso MATRICIALE con $A: X \to AX$ al posto di f:
il RANGO di A e' la dimensione dell'immagine di A.

$\text{rank}\, A = \dim \text{span}\{A^1, \dots A^n\}$ (dove $A^1, \dots A^n$ colonne di A che sappiamo generano l'immagine)

> PROPRIETA': $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^t)$

ALGORITMO di GAUSS

- **OPERAZIONI ELEMENTARI**

① $R_i \leftrightarrow R_j$ scambio di posizione tra righe della matrice

② $R_i \rightarrow \lambda R_i$ prodotto riga per uno scalare

③ $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ somma tra righe

- **ALGORITMO per le RIGHE** (G_R)

Partiamo da una matrice $A \in M(m, n, \mathbb{K})$.

Ogni passo è un "pacchetto" di operazioni elementari:

$$A = A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_k = \hat{A}_R$$

PASSO i:

- se $A_i = \emptyset$ allora $A_i = \hat{A}_R$

  altrimenti $\exists A^j : A^j$ non è nulla $\Rightarrow \exists a_{xj} \neq 0$

- $R_i \longleftrightarrow R_x$ la riga col primo termine non nullo viene spostata alla riga più alta. Sia ora $a_{ij} = \lambda$
- $R_i \rightarrow \lambda^{-1} R_i$ cosicché $a_{ij} = 1$. Chiamo questi elementi: PIVOTS.
- $R_y \rightarrow R_y - a_{yj} R_i$ cosicché i valori della colonna j sotto ad a_{ij} siano tutti nulli.
- Passare al PASSO i+1 la matrice ottenuta, ignorando la riga R_i

- **ALGORITMO per le COLONNE** (G_C)

Partiamo da una matrice $A \in M(m, n, \mathbb{K})$.

$$A \xrightarrow{t} A^t \xrightarrow{G_R} \hat{A}^t_R \xrightarrow{t} (\hat{A}^t_R)^t = \hat{A}_C$$

- **ALGORITMO COMPLETO**

Partiamo da una matrice $A \in M(m, n, \mathbb{K})$.

Eseguiamo su A l'algoritmo di Gauss per le righe $\Rightarrow \hat{A}_R$.

Eseguo operazioni di tipo 3 sulle righe affinché gli elementi SOPRA i pivots non sono NULLI. $\Rightarrow \tilde{A}_R$.

- **PROPRIETÀ di $\hat{A}_R$ (e di $\tilde{A}_R$)**
  - la matrice $\hat{A}_R$ è a "**GRADINI**" rispetto alle righe.
  - per ogni riga il primo elemento non nullo è 1, **PIVOT**.
  - siano a_{ij} e $a_{i+1\,k}$ PIVOTS di righe adiacenti. $j < k$.

  - **SPAN**
    - $\text{Span}(R(A)) = \text{Span}(R(\tilde{A}_R))$
    - $\text{Span}(C(A)) = \text{Span}(C(\tilde{A}_C))$

  - **RANK**
    - $\text{rank}\, A = \text{rank}\, \tilde{A}_R = \#$ pivots di $\tilde{A}_R$
    - $\text{rank}\, A = \text{rank}\, \tilde{A}_C = \#$ pivots di $\tilde{A}_C$

  - **CRITERIO di ROUCHÉ - CAPELLI**

    Sia $AX = D$ un'equazione tra matrici.

    Sia $M = (A|D)$ la MATRICE COMPLETA del SISTEMA

    $$\exists \text{ soluzioni per } AX = D \iff \text{rank}\, A = \text{rank}\, M$$

  - (**Lemma**) $AX = D$ e $\tilde{A}_R X = \tilde{D}_R$ hanno stesso insieme di soluzioni.

- **APPLICAZIONI**
  - **OPERAZIONI ELEMENTARI**

    Per ogni op. elementare dell'Alg. di Gauss esiste:

    $E \in M(m, m, \mathbb{K})$ dove E è l'operazione su I_m
    - in particolare $A' = E \cdot A$
    - $E \in GL(m, \mathbb{K})$ e E^{-1} è dello STESSO TIPO di E

  - **ALGORITMO per il CALCOLO di A^{-1}**

    Sia $A \in M(m, m, \mathbb{K})$ matrice invertibile.

    Con Algoritmo di Gauss: $\tilde{A}_R = I_m$.
    - $(E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_1) A = I_m$ trova A^{-1}.
    - $\forall A \in GL(m, \mathbb{K})$ A è prodotto di MATRICI ELEMENTARI

- **DS-equivalenza**

Trovo Q, P matrici tali che $QAP = I_m$

con le MATRICI ELEMENTARI e A_G su righe/colonne.

- **Sistemi lineari**

Se $M = (A|D)$ e $M' = (\tilde{A}_c | \tilde{D}_c)$ equivalenti,

verifico perchè $M' = (EA | ED)$, cambiamento COORDINATE

in ARRIVO $\Rightarrow$ SOLUZIONI non CAMBIANO.

- **D-equivalenza / S-equivalenza**

Studiare la relazione MONOLATERALE di $\sim_{DS}$.

- $A \sim_D B \iff \exists P : B = P \cdot A$
- $A \sim_S B \iff \exists Q : B = A \cdot Q$

Ci sono INVARIANTI:

- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ per $\sim_D$ ed $\sim_S$
- $\ker A = \ker B$ per $\sim_S$
- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$ per $\sim_D$

• STUDIO REGIME SURGETTIVO / INIETTIVO

▸ **REGIME SURGETTIVO**

È lo studio delle matrici

$$M_m(m,n,\mathbb{K}) := \{ A \in M(m,n,\mathbb{K}) \mid \dim \operatorname{Im} A = m \}$$

Per $\sim_D$ equivalenza, c'è un'unica CLASSE DI EQUIVALENZA con un rappresentante privilegiato: $(I_m | 0)$

▸ **REGIME INIETTIVO**

È lo studio delle matrici

$$M_n(m,n,\mathbb{K}) := \{ A \in M(m,n,\mathbb{K}) \mid \dim \operatorname{Im} A = n \}$$

Per $\sim_D$ equivalenza, le CLASSI DI EQUIVALENZA sono determinate dalle possibili matrici $\tilde{A}_c$.

Conseguenza: $\quad A_n(m,n,\mathbb{K}) \longleftrightarrow G_{m,n}$

$$\{ \tilde{A}_c \mid A \in M_n(m,n,\mathbb{K}) \} \longleftrightarrow \{ W \subseteq \mathbb{K}^m \mid \dim W = n \}$$

Simbolo di Schubert

- **DEF**: Simbolo di Schubert

Sia $A \in M(m,n,\mathbb{K})$. Allora:

$$s(A) := s(\tilde{A}_c) = \{ 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < m \}$$

dove $\forall\, s_i = j$: a_{ij} PIVOT di $\tilde{A}_c$.

- **SIMBOLO SCHUBERT e $\mathcal{A}_n$**

Dato $\mathcal{A}_n(m,n) = \{ \tilde{A}_c \mid A \in M_n(m,n) \}$ e un simbolo s:

$$\mathcal{A}_s(m,n) = \{ \tilde{A}_c \mid s(\tilde{A}_c) = s \} \subseteq \mathcal{A}_n(m,n)$$

In particolare s PARTIZIONA $\mathcal{A}_n(m,n)$, quindi $G_{m,n}$.

- **STUDIO di $\mathcal{A}_s$**

Sia $J_s \in \mathcal{A}_s$, tale che ogni cella che non e' PIVOT sia NULLA.

Definisco:

$$\mathcal{B}_s = \{ B \mid B = \tilde{A} - J_s \text{ con } \tilde{A} \in \mathcal{A}_s \}$$

che e' un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $M(m,n,\mathbb{K})$.

Conseguenza: $\mathcal{A}_s$ e' SPAZIO VETTORIALE TRASLATO.

$\mathcal{A}_s$ si chiamano CELLE di SCHUBERT

SPAZIO DUALE

- **DEF: Spazio Duale**

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Il suo SPAZIO DUALE e':
$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$
dove $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ spazio con base canonica $\mathcal{C} = \{1\}$.

- ISOMORFISMO (1)

Sia $f_B : V^* \rightarrow M(1, n, \mathbb{K})$ definita con $\dim V = n$.
$$\phi \longrightarrow M_1^B(\phi)$$
e' un ISOMORFISMO. Allora $\dim V^* = \dim V = n$.

- **DEF: Base Duale**

Sia $B^* := \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ la base di V^* tale che
$$f_B(v_i^*) = E_i^T$$
essa e' la BASE DUALE della base B di V.

- PROPRIETÀ

→ $$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

→ $\exists!$ isomorfismo $V \rightarrow V^*$ che dipende da B (non canonico).
$$x_B : V \rightarrow V^*$$
$$v_j \longrightarrow v_j^*$$

- FUNCTORE CONTROVARIANTE

Sia $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ la CATEGORIA dove:
- i $\mathbb{K}$-spazi vettoriali sono OGGETTI
- le applicazioni lineari sono MORFISMI

Se crea una corrispondenza $V \Rightarrow V^*$, allora la corrispondenza tra i morfismi e CONTROVARIANTE:
$$f \in \mathrm{Hom}(V, W) \Rightarrow f^T \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$$

⇒ CASO MATRICIALE
$$f \in \mathrm{Hom}(V, W) \Rightarrow M_{B^*}^{D^*}(f^T) = \left(M_D^B(f)\right)^T$$

- ANNULLATORE di SOTTOSPAZIO

$$\mathrm{Ann}(W) = \{\phi \in V^* : \phi|_W = 0\}$$ dove W ssp. V finito.

- PROPRIETA'

- $\mathrm{Ann}(W)$ e' sottospazio di V^*
- $\dim \mathrm{Ann} = \dim V - \dim W$
- $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}(f^T)$

- DEF: Spazio Biduale

Sia V spazio vettoriale. Allora $V^{**} := (V^*)^*$ e' il suo BIDUALE.

- ISOMORFISMI

- $x_{B^*} \circ x_B : V \to V^{**}$ e' isomorfismo CANONICO.
- Sia $\mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K})$ l'insieme di funzioni BILINEARI. Allora:

$$x : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbb{K})$$
$$x(f)(v, \phi) = \phi(f(v))$$ e' ISOMORFISMO CANONICO

ENDOMORFISMI

▸ CONIUGATI / SIMILI

· Sia V un $\mathbb{K}$-spazio finitamente generato. Definisco:

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) &\longrightarrow \mathrm{End}(V) \\ h &\longrightarrow \phi_h \end{aligned} \qquad \phi_h(f) = h \circ f \circ h^{-1}$$

· **RELAZIONE di EQUIVALENZA**

" $g \sim f$, $g, f \in \mathrm{End}(V)$ $\iff$ $\exists h :$ $g = \phi_h(f)$ "

Questa relazione, nel CASO MATRICIALE:

" $A \sim B$ $\iff$ $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$: $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ "

· **CARATTERIZZAZIONI di EQUIVALENZA**

① $g, f \in \mathrm{End}(V)$ sono CONIUGATI

② $\forall B$ base di V, $M_B^B(g)$ e $M_B^B(f)$ sono SIMILI

③ $\exists B$ base di V, $M_B^B(g)$ e $M_B^B(f)$ sono SIMILI

④ $\exists B, B'$ basi V, $M_{B'}^{B'}(g) = M_B^B(f)$

· **INVARIANTI**

- $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}\, g$ se $f \sim g$ rango
- $\det(A) = \det(B)$ se $A \sim B$ determinante
- $\mathrm{spec}(f) = \mathrm{spec}(g)$ se $f \sim g$ spettro
- $p_A(t) = p_B(t)$ se $A \sim B$ polinomio caratteristico

DETERMINANTE

- **CASO 2×2**

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} \in M(2, \mathbb{K})$. Allora:

$$A \in GL(2, \mathbb{K}) \iff a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$$

- **FUNZIONE DETERMINANTE 2×2**

$\det := \det_2 : M(2, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

- **PROPRIETA' ASSIOMATICHE $\det_2$**

1. det è una funzione BILINEARE: fissando una colonna, al variare dell'altra det è LINEARE.
2. Se $A \in M(2, \mathbb{K})$, $A = (X, X)$ allora $\det A = 0$
3. $\det I_2 = 1$

- **PROPRIETA' DERIVATE $\det_2$**
  - $\det(X, Y) = -\det(Y, X)$
  - $\det_2$ è l'UNICA che verifica 1, 2, 3.
  - Formula del Prodotto (di Binet)

    $\forall B, A \in M(2, \mathbb{K})$: $\det(BA) = \det(B)\det(A)$
  - $A \in GL(2, \mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
  - Invarianza per MATRICI SIMILI

- **FUNZIONE DETERMINANTE $n \times n$**

Sia $D : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. D è FUNZIONE DETERMINANTE se:

1. è MULTILINEARE rispetto alle colonne
2. $D(\dots X, X, \dots) = 0$
3. $D(I_n) = 1$

- **PROPRIETA'**

→ $D(\dots X, Y, \dots) = -D(\dots Y, X, \dots)$

→ $D(\dots X \dots X \dots) = 0$

→ $D(\dots X \dots Y \dots) = -D(\dots Y \dots X \dots)$

→ UNICITA' della funzione D determinante

→ ESISTENZA della funzione D determinante

- METODI di CALCOLO

▸ $$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \cdot D(\sigma(I_n))$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \quad \text{con } p \text{ parità di } \sigma$$

▸ $$\begin{cases} \det_1(a) = a \\ \det_{n+1}(A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \end{cases}$$

dove i è un indice di riga arbitrario, A_{ij} è la matrice A senza la i-esima riga e j-esima colonna.

- PROPRIETÀ DERIVATE

→ $\det(BA) = \det(B)\det(A)$

→ $A \in GL(n, \mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$

→ $B = PAP^{-1} \implies \det A = \det B$

→ $\forall V$ sp. vett. in $\mathbb{K}$ finito, $\forall \mathcal{B}$ base di V, $\forall f \in End(V)$
$$\det(f) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

→ $\det(A) = \det(A^T)$

→ Se A triangolare superiore allora $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

▸ $\det(A)$ può essere calcolato con Alg. Gauss

- $A \to \hat{A}_c$: se $\operatorname{rank} \hat{A}_c < n$ allora $\det(A) = 0$
- $\hat{A}_c \to \tilde{A}_c$: se $\operatorname{rank} \tilde{A}_c = n$ allora:

$$A^{-1} = E_1 E_2 \dots E_k \quad , \quad \det(A^{-1}) = \det(E_1) \cdot \ldots \cdot \det(E_k)$$

$$\begin{pmatrix} E_i \text{ del PRIMO TIPO} & : & \det(E_i) = -1 \\ E_i \text{ del SECON. TIPO} & : & \det(E_i) = \lambda \\ E_i \text{ del TERZO TIPO} & : & \det(E_i) = 1 \end{pmatrix}$$

▸ Formula di Kramer

Sia $AX = D$ sistema lineare. Sia $A(D)_j$ la matrice A con al posto della colonna A_j la colonna D. Allora:

$$\det(A(D)_j) = x_j \cdot \det(A)$$

Formula Determinantale per l'Inversa

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Per trovare A^{-1} risolvo:

$$AX^j = E^j \quad \text{per } j = 1 \ldots n$$

allora $A^{-1} = (X^1 \ldots X^n)$

INFO STRUTTURALE: A^{-1} è funzione razionale in coeff di A

Per Kramer ogni coefficiente x_{ij} di A^{-1} si calcola:

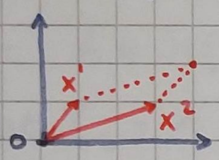
$$x_{ij} = \det(A(E^j)_i) \cdot [\det(A)]^{-1}$$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Considero il campo $\mathbb{R}^2$.

$A = (X^1, X^2)$ matrice che ha come colonne 2 vettori in $\mathbb{R}^2$.

Sia $P(X^1, X^2)$ il parallelogramma definito da X^1 e X^2:



allora $\det(A)$ è l'area segnata di $P(X^1, X^2)$.

Il SEGNO dipende dall'"ordine" di X^1 e X^2.

Autovalori e Autovettori

- **Autovalore**

Sia $f \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

| λ è AUTOVALORE se $\exists \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

- **Autospazio**

Sia λ autovalore di f in V spazio $\mathbb{K}$-vettoriale.

| $V_\lambda = V_\lambda(f) := \ker(f - \lambda\, id)$

dove quindi $\underline{v} \in V_\lambda$ è un AUTOVETTORE.

- **Spettro**

Sia $f \in End(V)$. Allora:

| $spec(f) := \{ \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ è autovalore di } f \}$

→ **Proprietà**

- $f|_{V_\lambda} = \lambda\, id|_{V_\lambda}$
- $g \sim f \implies spec(f) = spec(g)$
  $\dim V_\lambda(f) = \dim V_\lambda(g)$

- **Caso matriciale**

- Sia $f \in End(V)$. Sia B base di V, $A = \mathcal{M}_B^B(f)$.

| $spec(A) := spec(f)$

- Sia $A \in M(n,n,\mathbb{K})$, $\lambda \in spec(A)$. Allora:

| $\det(A - \lambda I) = 0$

- **Polinomio caratteristico**

Sia $A \in M(n,n,\mathbb{K})$. Ha allora:

$$p_A(t) := \det(A - tI) \in \mathbb{K}_n[t]$$

In particolare si osserva che:

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \cdot tr A \cdot t^{n-1} + \dots + \det A$$

ha coefficienti interessanti.

- $spec(A)$ è FINITO, $p_A(t)$ è di grado n.
- Sia $\lambda \in spec(A) \iff p_A(\lambda) = 0$

- **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA** (m_λ)

Il naturale m_λ indica la MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di un AUTOVALORE.

In particolare: $p_A(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda} \cdot q(t)$ con $q(\lambda) \neq 0$.

- INVARIANTE per coniugio / simile

$A \sim B \implies p_A(t) = p_B(t)$

$f \sim g \implies p_f(t) = p_g(t)$

[$\det(B - xI) = \det(A - xI)$ da questo ho che $f_a = f_b$ (caso K inf.).

- **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA** ($\dim V_\lambda(f)$)

La molteplicità geometrica è la dimensione dell'AUTOSPAZIO $V_\lambda(f)$, dove ricordo: $V_\lambda(f) := \ker(f - \lambda\, id)$.

In particolare: $m_\lambda \geq \dim V_\lambda(f)$

• SOMMA di AUTOSPAZI

- **SOMMA DIRETTA**

Siano $W_1, \dots W_k$ sottospazi di V. La somma è definita:

$$W_1 + \dots + W_k = \text{span}\left(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\right)$$

La somma è DIRETTA quando:

1) $\forall\, w \in W_1 + \dots + W_k$, la scrittura è unica come:

$$w = w_1 + \dots + w_k, \quad w_j \in W_j$$

2) $w_1 + \dots + w_k = 0 \implies w_j = 0 \quad \forall j = 1..k$

3) Sia B_j base di W_j. Allora:

$$B = \{B_1, \dots B_k\} \text{ base di } W_1 + \dots + W_k$$

4) $\dim(W_1 + \dots + W_k) = \sum_{j=1}^{k} \dim W_j$

- Somma di AUTOSPAZI è DIRETTA. [Uso la prop. 2 coi λ_k

ENDOMORFISMI DIAGONALIZZABILI
(restrizione dello studio della relazione $\sim$)

- ## ENDOMORFISMO DIAGONALIZZABILE

Sia $f \in End(V)$, con $spec(f) = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$. E' diagonalizzabile se:

1) $\exists$ base di V composta da autovettori di f.
2) $\exists$ base B di V tale che $M_B^B(f)$ e' matrice DIAGONALE.
3) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

- ### INVARIANTE per $\sim$

Essere o no diagonalizzabile e' invariante per $\sim$.

La restrizione dello studio a $D(V)/_\sim$ ha senso.

- ### CRITERIO DIAGONALIZZABILITA'

Sia $f \in End(V)$. f e' DIAGONALIZZABILE $\iff$

- il POLINOMIO CARATTERISTICO e' COMPLETAMENTE FATTORIZZABILE in $\mathbb{K}[t]$:

$$p_f(t) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - t)^{m_{\lambda_j}}$$

- $\forall \lambda \in spec(f)$, $m_\lambda = \dim V_\lambda(f)$ [calcolo dimensioni $V / V_{\lambda_1} \oplus \dots V_{\lambda_k}$

ENDOMORFISMI TRIANGOLABILI

(restrizione dello studio per la relazione $\sim$)

- ## ENDOMORFISMO TRIANGOLABILE

Sia $f \in End(V)$, B base di V. f e' TRIANGOLABILE se:

1) B 'triangola' f, ovvero $M_B^B(f)$ e' matrice triangolare

2) la bandiera di B e' f-invariante, $\forall i \in 1, \dots \dim V$:

$$f(\text{span}(v_1, \dots, v_i)) \subseteq \text{span}(v_1, \dots, v_i)$$

- INVARIANTE per $\sim$ (non totale)

Essere o no triangolabili e' invariante per coniugio.

- CRITERIO di TRIANGOLABILITÀ

f e' TRIANGOLABILE $\iff$ p_f completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[t]$

(Corollario) Se $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, $T(V) = End(V)$.

Ideali di Endomorfismi

- **Omomorfismo di Anelli**

Sia $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$
e sia $f \in \mathrm{End}(V)$.

Definisco $p(f) = a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0 \in \mathrm{End}(V)$
dove $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^n = f \circ f^{n-1}$, $f^0 = id_V$.

$\Rightarrow \varphi : \mathbb{K}[t] \to \mathrm{End}(V)$ dove $\varphi(p) = p(f)$
è OMOMORFISMO di ANELLI.

- **Ideale di f**

Dato $f \in \mathrm{End}(V)$, definisco ideale di f:

$I(f) := \ker \varphi = \{ p(t) \in \mathbb{K}[t] : p(f) = 0 \}$

- **Polinomio minimo**

Dato che $\mathrm{Im}\,\varphi$ è PID, allora l'IDEALE di f è generato da un elemento $q_0(t)$, detto POLINOMIO MINIMO (monico).

$I(f) = (q_0(t))$

→ Il POLINOMIO MINIMO è invariante per $\sim$.

- **Teorema**

Il POLINOMIO CARATTERISTICO $p_f \in I(f)$.

$\Rightarrow q_f \mid p_f$

- **Oss.**

Sia $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Allora $\forall\, p(t) \in I(f)$, $p(\lambda) = 0$.

- **Corollario**

Supponendo $p_f(t)$ completamente fattorizzabile:

$$p_f(t) = \prod_{\lambda \in spec(f)} (\lambda - t)^{m_\lambda} \Rightarrow q_f(t) = \prod_{\lambda \in spec(f)} (\lambda - t)^{r_\lambda}$$

con $1 \le r_\lambda \le m_\lambda$

DECOMPOSIZIONE PRIMARIA

Sia $p(t) \in I(f)$, con $p(t) = a(t) \cdot b(t)$, $(a, b) = 1$.

Allora :

- $V = (\ker a(f)) \oplus (\ker b(f))$
- i due sottospazi sono f- INVARIANTI

- **Corollario**

Sia f triangolabile, p_f polinomio caratteristico, q_f minimo.

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} \ker(\lambda - t)^{m_\lambda}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} \ker(\lambda - t)^{r_\lambda}$$

STUDIO ENDOMORFISMI con un singolo AUTOVALORE

- **AUTOSPAZI GENERALIZZATI**

Sia λ autovalore di f. $\forall s \geq 1$:

$\ker(\lambda id_V - f)^s$ e' AUTOSPAZIO GENERALIZZATO

- **OSS**

Sia $h \in End(V)$. $\forall k \geq 1$:

- $\ker(h^k) \subseteq \ker(h^{k+1})$
- se $\ker(h^k) = \ker(h^{k+1})$ allora $\ker(h^{k+1}) = \ker(h^{k+2}) = \dots$

FORMA NORMALE di JORDAN

- **RIDUZIONE al CASO NILPOTENTE**

Siano $f, g : W \to W$ endomorfismi con un solo autovalore λ, triangolabili.

Sia $h(f) = \lambda id - f$ e $h(g) = \lambda id - g$.

$\Rightarrow$ $h(f)$ e $h(g)$ nilpotenti.

$\Rightarrow$ $f \sim g \iff h(f) \sim h(g)$

- **FORMA NORMALE di JORDAN / BASE di JORDAN**

Sia f endomorfismo nilpotente.

> f è in FORMA NORMALE di JORDAN quando la matrice associata è diagonale a blocchi di Jordan.

> B è una BASE di JORDAN per f se $m_B^B(f)$ è in forma normale di Jordan.

- **FCJ come INVARIANTE COMPLETO**

> **SPETTRO e STRINGA DIMENSIONI**

Sia $d_i = \dim(\ker(\lambda id_W - g)^i)$, allora:

$$D(g) = (d_1 < \dots < d_r)$$

e si vede che $f \sim g \iff D(f) = D(g)$

> INVARIANZA: $\forall g \in End(W)$, $\exists B$ base di W : $m_B^B(g)$ ha la FORMA NORMALE di JORDAN.

- ESISTENZA di B

Costruzione di una base sapendo $\forall i \leq r$:

- $\ker g^i = \ker g^{i-1} \oplus U$
- $g(U) \subseteq \ker g^{i-1}$ e i vett. scelti di U sono lin. indip

- UNICITÀ di FCJ

FCJ REALE

• COMPLESSIFICAZIONE di SPAZI REALI

• Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Per complessificarlo a $V_{\mathbb{C}}$:

1) considero $(V \times V, +, \cdot)$ spazio prodotto
2) fisso la copia di V come $V \times \{0\}$
3) estendo il prodotto $\cdot_{\mathbb{R}}$ a prodotto $\cdot_{\mathbb{C}}$ dove:

$$z = a + ib \in \mathbb{C}, \quad (\underline{v}, \underline{w}) \in V \times V:$$

$$z \cdot (\underline{v}, \underline{w}) = (a+ib)(\underline{v}, \underline{w}) := (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$$

in particolare, allora, $V \times V \sim V \times iV$ e definisco

$$V_{\mathbb{C}} = V \times iV \quad \text{il complessificato}$$

• **BASE REALE**

Sia B una base di V. Allora $B \subseteq V_{\mathbb{C}}$ e' una base di $V_{\mathbb{C}}$, detta base reale.

• **ENDOMORFISMO**

Sia f un endomorfismo di V. Allora:

$$f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$$
$$\underline{v} + i\underline{w} \to f(\underline{v}) + i f(\underline{w})$$

verifica che $f_{\mathbb{C}}|_V = f$ e inoltre che $M_B^B(f_{\mathbb{C}}) = M_B^B(f)$.
Ne segue ancora che $p(f_{\mathbb{C}}) = p(f) \in \mathbb{R}[t]$.

• FCJ REALE

• **LEMMA**

Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$

$$\exists\, R \in GL(n, \mathbb{R}) : B = RAR^{-1} \iff \exists\, C \in GL(n, \mathbb{C}) : B = CAC^{-1}$$

(ovvero FCJ complessa e' INVARIANTE COMPLETO per i End(V))

- **FATTORIZZAZIONE in $\mathbb{R}[t]$**

Sia $p(t) \in \mathbb{R}[t] \subseteq \mathbb{C}[t]$.

- $p(\alpha) = 0 \iff p(\bar{\alpha}) = 0$ per $\alpha \in \mathbb{C}$

- Ogni polinomio $p(t)$ si può fattorizzare come:

$$p(t) = \left[\prod_{j=1}^{r} (t-\lambda_j)^{m_j}\right]\left[\prod_{s=1}^{c} (t-\alpha_s)^{n_s}(t-\bar{\alpha}_s)^{n_s}\right]$$

PS. scrivo $q_{\alpha_s} = (t-\alpha_s)(t-\bar{\alpha}_s) \in \mathbb{R}[t]$.

- **DECOMPOSIZIONE PRIMARIA**

Considero le fattorizzazioni di $p_{f_\mathbb{C}}$ e p_f.

$\rightarrow$ $V = \left(\bigoplus_{j=1}^{r} W_j\right) \oplus \left(\bigoplus_{s=1}^{c} Z_s\right)$ $\quad \Big|$ $W_j = \ker(f - \lambda_j id_V)^{m_j}$, $\; Z_s = \ker(q_{\alpha_s}(f))^{n_s}$

$\rightarrow$ $V_\mathbb{C} = \left(\bigoplus_{j=1}^{r} \tilde{W}_j\right) \oplus \left(\bigoplus_{s=1}^{c} (U_s \oplus \hat{U}_s)\right)$ $\quad \Big|$ $\tilde{W}_j = \ker(f_\mathbb{C} - \lambda_j id_{V_\mathbb{C}})^{m_j}$, $\; U_s = \ker(f_\mathbb{C} - \alpha_s id_{V_\mathbb{C}})^{n_s}$, $\; \hat{U}_s = \ker(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha}_s id_{V_\mathbb{C}})^{n_s}$

Trovo allora le proprietà:

- $\tilde{W}_j = (W_j)_\mathbb{C}$
- $U_s \oplus \hat{U}_s = (Z_s)_\mathbb{C}$
- $\hat{U}_s = \overline{U_s}$
- $f_\mathbb{C}$ ristretto ai sottospazi invarianti è complessificato di f ristretto ai relativi sottospazi in V.

- **FORMA NORMALE REALE**

La decomposizione riduce lo studio a due casi:

① $g : W \to W$ tale che $p_g(t) = p_{g_\mathbb{C}}(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda}$

$\Rightarrow$ g è TRIANGOLABILE quindi FCJ è ricondotta al caso già studiato.

② $g : Z \to Z$ (dove $Z_\mathbb{C} = U \oplus \overline{U}$)

tale che $p_g(t) = (q_\alpha(t))^n$, $p_{g_\mathbb{C}}(t) = (t-\alpha)^n(t-\bar{\alpha})^n$

$\Rightarrow$ Trovo base complessa e proietto a base reale.

PRODOTTI SCALARE: ISOMETRIA

▶ PRODOTTO SCALARE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$.
Un PRODOTTO SCALARE è un'applicazione BILINEARE SIMMETRICA:

$$\Phi : V \times V \to \mathbb{K} \quad : \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \Phi(\underline{v}, \underline{w}) = \Phi(\underline{w}, \underline{v})$$

- Caso matriciale

Sia $V = \mathbb{K}^n$. Allora Φ bilineare è nella forma:

$$\Phi(X, Y) : X^T A Y$$

dove affinché Φ simmetrica, $A = A^T$. Scriveremo $\Phi = \Phi_A$.

▶ ISOMETRIA

Una ISOMETRIA è un ISOMORFISMO LINEARE:

$$f : (V, \Phi) \longrightarrow (W, \Psi)$$

dove il prodotto scalare si conserva: $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V : \Phi(\underline{v}, \underline{w}) = \Psi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$

- STUDIO INVARIANTI (approcci equivalenti)
  - Dati (V, Φ) e (W, Ψ) dire se sono isometrici
  - Fissato V, trovare i prodotti scalare a meno di isometria.
    Allora dato $f : V \to W$ isomorfismo, si individuano tautologicamente le classi di equivalenza: Φ p.s. di V definito:

$$\Phi(\underline{v}, \underline{w}) := \Psi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

- CONGRUENZA (Caso matriciale)

Sia $V = \mathbb{K}^n$, siano Φ_A, Φ_B prodotti scalare.

Φ_A isometrico $\Phi_B \iff \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) : B = P^T A P$

- PASSAGGIO a COORDINATE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$, Φ prodotto scalare.
La MATRICE ASSOCIATA a Φ tramite base B è:

$$M = \mathcal{M}_B(\Phi) \quad : \quad \Phi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_B^T \, M \, [\underline{w}]_B$$

- CARATTERIZZAZIONE ISOMETRIA (Φ e Ψ prodotti scalare)

1) Φ isometrico a Ψ
2) $\forall B$ base di V, $M_B(\Phi)$ e $M_B(\Psi)$ congruenti
3) $\exists B$ base di V, $M_B(\Phi)$ e $M_B(\Psi)$ congruenti
4) $\exists B, D$ basi di V, $M_B(\Phi) = M_D(\Psi)$

RESTRIZIONE a SOTTOSPAZI

- Sia V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$, Φ prodotto scalare.

$\Phi|_W$ con W ssp. V $\Rightarrow$ $\Phi|_W$ prodotto scalare

- SOTTOSPAZIO ORTOGONALE (e RADICALE)

Sia W ssp. di V. Allora:

$W^\perp = \{ \underline{v} \in V : \Phi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in W \}$

in particolare: $Rad(\Phi) = V^\perp$

$Rad(\Phi) = \{\underline{0}\} \Rightarrow \Phi$ e' NON DEGENERE

- PROPOSIZIONI

→ $\dim Rad(\Phi_A) = n - \text{rank} A$

→ $V = W \oplus W^\perp \iff \Phi|_W$ non degenere

→ $\dim W^\perp = \dim V - \dim W + \dim(W \cap Rad\,\Phi)$

→ Sia W ssp. V tale che $V = W \oplus Rad\,\Phi$, allora:

$\pi_W : (W, \Phi|_W) \longrightarrow (V/_{Rad\Phi}, \bar{\Phi})$ e' ISOMETRIA

FORMA QUADRATICA

Sia V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, Φ prodotto scalare.

La FORMA QUADRATICA di Φ e':

$q_\Phi : V \longrightarrow \mathbb{K} \quad : \quad q_\Phi(\underline{v}) = \Phi(\underline{v}, \underline{v})$

- FORMULA di POLARIZZAZIONE

$$2 \cdot \Phi(\underline{v}, \underline{w}) = q_\Phi(\underline{v} + \underline{w}) - q_\Phi(\underline{v}) - q_\Phi(\underline{w})$$

se $\text{char}\,\mathbb{K} \neq 2$: $\quad q_\Phi = 0 \iff \Phi = 0$

- **ISOTROPO**

Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice ISOTROPO per ϕ se:

$$q_\phi(\underline{v}) = \phi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$$

- **ANISOTROPO**

Un prodotto scalare ϕ si dice ANISOTROPO se:

$$\forall\, \underline{v} \in V,\ \underline{v} \neq \underline{0} : \quad \phi(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0$$

OSS. ϕ anisotropo $\Rightarrow$ ϕ non degenere

BASE ORTOGONALE

Una base $B = \{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n\}$ di V si dice ORTOGONALE per ϕ se:

- $\forall\, i,j$ distinti $\quad \phi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0$
- $M_B(\phi)$ e' DIAGONALE

- **TEOREMA**

Ogni (V, ϕ) ammette basi ortogonali.

- **COEFFICIENTE di FOURIER**

Sia $\underline{v} \in V$ non isotropo, $W = Span(\underline{v})$.

Il COEFFICIENTE di FOURIER di $\underline{w} \in V$ rispetto a $\underline{v}$ e':

$$c(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{\phi(\underline{w}, \underline{v})}{\phi(\underline{v}, \underline{v})}$$

In particolare:

$\rightarrow$ la PROIEZIONE di $\underline{w}$ su W e' $\quad c(\underline{w}, \underline{v}) \cdot \underline{v}$

$\rightarrow$ la PROIEZIONE di $\underline{w}$ su $W^\perp$ e' $\quad \underline{w} - c(\underline{w}, \underline{v}) \cdot \underline{v}$

- **TEOREMA** (versione matriciale)

Per ϕ_A in $V = \mathbb{K}^n$ $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) : P^T A P$ diagonale

$\Rightarrow$ ogni matrice simmetrica e' congruente a matrice diagonale

ALGORITMO di ORTOGONALIZZAZIONE

Sia V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, Φ prodotto scalare, B base di V:

$B = \{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n\}$ arbitraria.

- se $\Phi = 0$, poniamo $B' = B$ ortogonale
- se $\Phi \neq 0$, esiste almeno un vettore non isotropo:
  - $\exists i$: $\underline{v}_i$ non isotropo, riordino: $\underline{v}_i \Rightarrow \underline{v}_1$
  - $\forall i$: $\underline{v}_i$ isotropo. Siano $\underline{v}_i$ e $\underline{v}_j$ tali che $\Phi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \neq 0$.

    Allora $\underline{v}_1 = \underline{v}_i + \underline{v}_j$ e riordino per avere una base.

Assumendo allora $\underline{v}_1$ non isotropo, $W = \mathrm{Span}(\underline{v}_1)$.

Proietto con il coefficiente di Fourier $\underline{v}_2 \dots \underline{v}_n$ su $W^\perp$, ottengo

$\underline{w}_2 \dots \underline{w}_n$ base di $W^\perp$ $\Rightarrow$ $\tilde{B} = \{\underline{v}_1, \underline{w}_2 \dots \underline{w}_n\}$ base V

Ripeto il procedimento con $\tilde{B}$ su $W^\perp$ in modo ricorsivo.

- OSS. se Φ anisotropo, $\underline{v}_1$ sempre non isotropo, l'algoritmo si semplifica
- OSS. B e $\tilde{B}$ descrivono la stessa bandiera di sottospazi se Φ anisot.
- Corollario

  Sia (V, Φ) con $f \in \mathrm{End}(V)$ triangolabile, Φ anisotropo.

  $\Rightarrow$ $\exists$ B base V ortogonale per Φ, che triangola f

PRODOTTI SCALARE su $\mathbb{R}$

- DEFINITO POSITIVO

  Sia Φ prodotto scalare in $\mathbb{R}$-spazio. Φ e' DEFINITO POSITIVO se:

  $\forall \underline{v} \in V, \underline{v} \neq 0$: $\Phi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$

- TEOREMA

  Φ e' anisotropo $\Leftrightarrow$ Φ e' definito

PRODOTTI SCALARE su $\mathbb{C}$

- TEOREMA

  Φ e' anisotropo $\Leftrightarrow$ Φ non degenere, $\dim V = 1$

- **BASI ORTONORMALI**

- **$\mathbb{K} = \mathbb{C}$**

- Sia $B = \{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n\}$ base ortogonale di (V, Φ).

Riordinando, siano i primi m vettori non isotropi; gli ultimi base di $\mathrm{Rad}\,\Phi$.

$\forall i = 1, \dots m \qquad \Phi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = c_i \neq 0$

Sia ora un cambiamento di base $B' = \{t_1 \underline{v}_1, \dots, t_m \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1} \dots \underline{v}_n\}$

con $t_i \neq 0$. Scelgo $t_i^2 = 1/c_i$.

Allora **B' e' NORMALIZZATA**:

$$\mathcal{M}_{B'}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **TEOREMA ($\mathbb{C}$)**

| $\dim \mathrm{Rad}\,\Phi$ INVARIANTE COMPLETO per ISOMETRIA

- **$\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

- Sia $B = \{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n\}$ base ortogonale di (V, Φ).

Riordinando siano:

- i primi p vettori tali che $\quad c_i = \Phi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$
- i successivi q vettori tali che $\quad c_j = \Phi(\underline{v}_j, \underline{v}_j) < 0 \quad \forall j = p+1, \dots, p+q$
- gli ultimi $n-p-q$ vettori base di $\mathrm{Rad}\,\Phi$, isotropi.

Scrivo allora: $\quad B' = \{t_1 \underline{v}_1, \dots, t_{p+q} \underline{v}_{p+q}, \underline{v}_{p+q+1} \dots \underline{v}_n\}$ dove:

$\forall i = 1, \dots, p \qquad t_i^2 = 1/c_i$

$\forall j = p+1, \dots p+q \qquad t_j^2 = -1/c_j$

Allora **B' e' NORMALIZZATA**:

$$\mathcal{M}_{B'}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- **SEGNATURA**

| $\sigma(\Phi) = (i_+, i_-, \dim \mathrm{Rad}\,\Phi)$

| dove $i_+ = \max\{\dim W \mid W \text{ ssp } V,\ \Phi|_W \text{ definito positivo}\}$

=> TEOREMA di SYLVESTER ($\mathbb{R}$)

$\sigma(\Phi)$ SEGNATURA e' INVARIANTE COMPLETO per ISOMETRIA

[Dimostra che $i_+ = p$, $i_- = q$ indipendenti dalla base B']

PRODOTTI SCALARE: RAPPRESENTAZIONE

▸ GRUPPO ORTOGONALE

Sia (V, Φ), definiamo il GRUPPO ORTOGONALE:

$$O(\Phi) = \{ f \in GL(V) \mid \forall \underline{v}, \underline{w} \in V : \Phi(\underline{v}, \underline{w}) = \Phi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \}$$

- Caso Matriciale

Sia $V = \mathbb{K}^n$, $\Phi = \Phi_M$, allora:

$$O(\Phi) = \{ P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid P^T M P = M \}$$

In particolare nel caso $M = I$ si ottiene il GRUPPO ORTOGON. CLASSICO:

$$O(n, \mathbb{K}) = \{ P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid P^{-1} = P^T \}$$

▸ TEOREMA di RAPPRESENTAZIONE

- Sia (V, Φ). Per ogni $\underline{v} \in V$:

$$\varphi_{\underline{v}}(\underline{w}) = \Phi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in V$$

funzionale lineare: $\varphi_{\underline{v}} \in V^*$.

- Definiamo allora l'applicazione F_Φ lineare:

$$F_\Phi : V \longrightarrow V^*$$
$$\underline{v} \longrightarrow \varphi_{\underline{v}}$$

⇒ $\varphi \in \operatorname{Im} F_\Phi$ è RAPPRESENTABILE tramite Φ

⇒ $F_\Phi^{-1}(\varphi)$ è l'insieme dei RAPPRESENTANTI di φ

- PROPRIETÀ di F_Φ

1) $\ker F_\Phi = \operatorname{Rad} \Phi$

2) $\operatorname{Im} F_\Phi = \operatorname{Ann}(\operatorname{Rad} \Phi)$

3) Φ non degenere $\Leftrightarrow$ F_Φ isomorfismo

⇒ $\underline{v}$ è unico rappresentatore di $\varphi_{\underline{v}}$

⇒ $\forall \Phi$ non degenere vi è ISOMORFISMO tra V e V^*

▸ ENDOMORFISMO AGGIUNTO

Sia $f \in End(V)$.

- Il TRASPOSTO di f e' definito:

$$f^T : V^* \longrightarrow V^*$$
$$\varphi \longrightarrow \varphi \circ f$$

- L' ENDOMORFISMO AGGIUNTO f^* e' definito:

$$f^* : V \longrightarrow V \quad , \quad f^* = F_\Phi^{-1} \circ f^T \circ F_\Phi$$

Disegnando il suo DIAGRAMMA:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "F_\Phi"'] & V \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "F_\Phi"] \\ V^* & V^* \arrow[l, "f^T"] \end{tikzcd}$$

$$f^T \circ F_\Phi = F_\Phi \circ f^*$$

$$\Phi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \Phi(f^*(\underline{v}), \underline{w})$$

▸ ISOMORFISMO CANONICO $End(V) \to Bil(V \times V)$

- $\chi : End(V) \longrightarrow Bil(V^* \times V)$

Esiste un ISOMORFISMO CANONICO χ tra $End(V)$ e $Bil(V^* \times V)$:

$$\chi : End(V) \longrightarrow Bil(V^* \times V)$$
$$f \longrightarrow \varphi(f(\underline{v})) \qquad \forall (\varphi, \underline{v}) \in V^* \times V$$

- $b_\Phi : Bil(V^* \times V) \longrightarrow Bil(V \times V)$

Dato Φ prodotto scalare non degenere, uso F_Φ:

$$b_\Phi : Bil(V^* \times V) \longrightarrow Bil(V \times V)$$
$$\psi \longrightarrow \psi(F_\Phi(\cdot), \cdot)$$

- $\chi_\Phi : End(V) \longrightarrow Bil(V \times V)$

Definisco allora $\chi_\Phi = b_\Phi \circ \chi$ tale che:

$\forall\ \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\chi_\Phi(f)(\underline{v}, \underline{w}) = \Phi(\underline{v}, f(\underline{w}))$$

▸ ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO

Sia $f \in End(V)$. f AUTOAGGIUNTO $\iff f = f^*$.

- f è AUTOAGGIUNTO $\iff \chi_\Phi(f)$ è SIMMETRICA

$\Rightarrow$ χ_Φ rappresenta χ canonico tramite Φ, in particolare:
- χ_Φ isomorfismo tra $End(V)$ e $Bil(V \times V)$
- χ_Φ identifica autoaggiunti con prodotti scalare

▸ SPAZI EUCLIDEI

- Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. $\exists\ \Phi > 0$ prodotto scalare definito positivo.

(V, Φ) si definisca SPAZIO EUCLIDEO

$\Rightarrow$ Data B base ORTONORMALE di V, $M_B(\Phi) = I$

$\Rightarrow$ $O(n, \mathbb{R}) = \{ P \in GL(n, \mathbb{R}) \mid P^{-1} = P^T \}$

▸ TEOREMA SPETTRALE REALE

- ENDOMORFISMO ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE

Sia $f \in End(V)$. f è ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE se:
$\exists\ B$ base ortonormale di V per Φ : $M_B^B(f)$ diagonale

- TSR

Sia (V, Φ) spazio euclideo. Sono veri ed equivalenti:

1) ogni f autoaggiunto è ortogonalmente diagonalizzabile
2) $\forall\ \psi \in PS(V)\ \exists\ B$ base di V:
   - B ortonormale per Φ
   - B ortogonale per ψ

- TSRM

Sia $(\mathbb{R}^n, \Phi_I)$ spazio euclideo. Sono veri ed equivalenti:

1) $\forall\ A \in S(n, \mathbb{R})\ \exists\ P \in O(n, \mathbb{R})$: $P^{-1}AP$ diagonale
2) $\forall\ \Phi_M \in PS(\mathbb{R}^n)\ \exists\ P \in O(n, \mathbb{R})$: $P^T M P$ diagonale

SPAZI EUCLIDEI

SPAZIO EUCLIDEO

Sia V spazio vettoriale in $\mathbb{R}$, con Φ prodotto scalare definito positivo.
Allora (V, Φ) e' uno SPAZIO EUCLIDEO.

NORMA

Dato (V, Φ) spazio euclideo, posso a coordinate ortonormali:
$(\mathbb{R}^n, \Phi_I)$ dove $\Phi_I(X, Y) = X^T Y$

Definisco allora la NORMA:

$$\| X \| = \sqrt{\Phi_I(X, X)} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

TEOREMA di PITAGORA

Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$: $\Phi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$. Allora:

$$\| \underline{v} + \underline{w} \|^2 = \| \underline{v} \|^2 + \| \underline{w} \|^2$$

DISUGUAGLIANZA di SCHWARZ

Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$. Allora:

$$| \Phi(\underline{v}, \underline{w}) | \leq \| \underline{v} \| \cdot \| \underline{w} \|$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$. Allora:

$$\| \underline{v} + \underline{w} \| \leq \| \underline{v} \| + \| \underline{w} \|$$

in particolare, questo dimostra che $\| \cdot \|$ e' una DISTANZA.

PROIEZIONE ORTOGONALE

- Sia W ssp. di V tale che $V = W \perp W^\perp$.

  Sia $\{\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_k\}$ base ortogonale di W. Allora dato $\underline{v} \in V$:
  - la PROIEZIONE ORTOGONALE su W: $\sum_{j=1}^{k} c(\underline{v}, \underline{v}_j) \underline{v}_j$
  - la PROIEZIONE ORTOGONALE sul $W^\perp$: $\underline{z} = \underline{v} - \sum_{j=1}^{k} c(\underline{v}, \underline{v}_j) \underline{v}_j$

- OSS. $\forall \underline{w} \in W$ ho la proprietà di minimo: $\| \underline{z} \| \leq \| \underline{v} - \underline{w} \|$

- **DISUGUAGLIANZA di BESSEL**

Sia W ssp. V tale che $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ base ortonormale di W.

$$\sum_{j=1}^{k} c(\underline{v}, \underline{v}_j)^2 \leq \|\underline{v}\|^2$$

- **ISOM (V, d)**

- Sia $f: V \to V$ funzione generica.

$$f \in Isom(V, d) \iff \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V : d(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = d(\underline{v}, \underline{w})$$

- Si dimostra che, in particolare:

$$f \in Isom(V, d) \iff \exists\, g \in O(\phi) : f(\underline{v}) = f(\underline{0}) + g(\underline{v})$$

ovvero $f = \tau_{f(\underline{0})} \circ g$

PRODOTTO HERMITIANO

PRODOTTO HERMITIANO

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Un prodotto Hermitiano ϕ è una funzione $\phi : V \times V \to \mathbb{C}$ tale che:

→ $\phi(\underline{v}, \underline{w}+\underline{z}) = \phi(\underline{v}, \underline{w}) + \phi(\underline{v}, \underline{z})$

$\phi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{z}) = \phi(\underline{v}, \underline{z}) + \phi(\underline{w}, \underline{z})$

→ $\phi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \phi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\phi(\underline{v}, \lambda \underline{w}) = \overline{\lambda}\, \phi(\underline{v}, \underline{w})$

→ $\phi(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\phi(\underline{w}, \underline{v})}$

- CASO MATRICIALE

Sia $V = \mathbb{C}^n$. Allora ϕ prodotto Hermitiano si scrive:

$$\phi(z, w) = \phi_M(z, w) = z^T M \overline{w}$$

dove in particolare $M = \overline{M}^T$.

- OSSERVAZIONE: per le proprietà del prodotto Hermitiano:

$\forall \underline{v} \in V$: $\phi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, la forma quadratica è reale.

⇒ Lo STUDIO dei PRODOTTI HERMITIANI ricalca parola per parola quello dei PRODOTTI SCALARI REALI.

⇒ La SEGNATURA è un INVARIANTE COMPLETO per isometria

ϕ DEFINITO POSITIVO

- BASE UNITARIA: è una base ortonormale per ϕ
- GRUPPO UNITARIO: $U(n) = \{ P \in GL(n, \mathbb{C}) \mid P^{-1} = \overline{P}^T \}$

- Sia $f \in End(V)$. f^* è AGGIUNTO di f se

$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$: $\phi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \phi(f^*(\underline{v}), \underline{w})$

- Sia $f \in End(V)$. f è NORMALE se

$f \circ f^* = f^* \circ f$

CLASSI di ENDOMORFISMI NORMALI

- AUTO-AGGIUNTI : $f^* = f \quad (A = \bar{A}^T)$
- ANTI-AUTOAGGIUNTI : $f^* = -f \quad (A = -\bar{A}^T)$
- UNITARI : $f^* = f^{-1} \quad (A^{-1} = \bar{A}^T)$

TEOREMA SPETTRALE HERMITIANO

Sia (V, Φ) un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale con Φ prodotto Hermitiano definito positivo. Sia $f \in End(V)$, allora:

f è UNITARIAMENTE DIAGONALIZZABILE $\iff$ f e' NORMALE

- Corollario: CARATTERIZZAZIONE SPETTRALE

Sia f normale. Allora:

- f autoaggiunto $\iff Sp(f) \subset \mathbb{R}$
- f anti-autoaggiunto $\iff Sp(f) \subset i\mathbb{R}$
- f unitario $\iff \forall \lambda \in Sp(f), \ |\lambda| = 1$

- Estensione a $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

→ DEF endomorfismo normale

Sia V reale, Φ definito positivo.

f e' NORMALE $\iff f \circ f^* = f^* \circ f$

→ ESTENSIONE TSH

- f AUTOAGGIUNTO $\Rightarrow$ TSR
- f ANTI-AUTOAGGIUNTO $\Rightarrow$ forma diagonale a blocchi 2×2: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ e' la FORMA NORMALE

GRUPPO ORTOGONALE

- Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, ϕ non degenere. Studio le proprietà di $O(\phi)$ gruppo ortogonale.

▸ RIFLESSIONE

Sia $\underline{v} \in V$ non isotropo. $W = \operatorname{Span}(\underline{v})$, $V = W \perp W^\perp$.

Allora $\forall \underline{w} \in V$: $\underline{w} = \lambda \underline{v} + \underline{z}$, $\underline{z} \in W^\perp$.

La RIFLESSIONE PARALLELA a $\underline{v}$ è la funzione:

$$\rho_{\underline{v}} : V \longrightarrow V$$
$$\underline{w} \longrightarrow -\lambda \underline{v} + \underline{z}$$

- $W^\perp = \operatorname{Fix}(\rho_{\underline{v}})$
- $\rho_{\underline{v}}^2 = id \implies \rho_{\underline{v}}$ è una INVOLUZIONE
- $\rho_{\underline{v}} \in O(\phi)$

Ⓐ $\underline{v}$ non isotropo, $f(\underline{v}) = \underline{v}$.
Ⓑ $f(\underline{v}) \neq \underline{v}$, $f(\underline{v}) - \underline{v}$ non iso
Ⓒ $f(\underline{v}) \neq \underline{v}$, $f(\underline{v}) - \underline{v}$ isotropo

▸ $O(\phi)$ gruppo ORTOGONALE

1) Ogni $f \in O(\phi)$ è COMPOSIZIONE di un numero finito di riflessioni: $f = \rho_{\underline{v}_1} \circ \dots \circ \rho_{\underline{v}_n}$
2) Esiste una costante $C(n) \in \mathbb{N}$ dipendente da $\dim V$:
   $\forall f \in O(n)$, f composizione di $k \leq C(n)$ riflessioni
3) $C(n) = n$ nel caso ϕ anisotropo, ma anche nel caso generale.

$\operatorname{Fix} \rho_{\underline{v}}$

conteggio dalla dimostraz. 1

ESTENSIONE di ISOMETRIE

▸ CONGRUENZA SOTTOSPAZI

Sia (V, ϕ) non degenere. Siano W_1, W_2 sottospazi di V.

W_1 e W_2 CONGRUENTI $\iff \exists f \in O(\phi) : f(W_1) = W_2$

▸ TEOREMA di ESTENSIONE di ISOMETRIE ASTRATTE

W_1 e W_2 CONGRUENTI $\iff \exists\, g : W_1 \to W_2$ ISOMETRIA ASTRATTA

- Caso NON DEGENERE
- Completamento non degenere
- Caso GENERALE

• COMPLETAMENTO NON DEGENERE

→ ESTENSIONE non DEGENERE

Sia W sottospazio di V.

$W \subset \tilde{W} \subset V$, $\tilde{W}$ non degenere $\Rightarrow$ $W \subset \tilde{W}$ estensione non degenere

→ COMPLETAMENTO non DEGENERE

$W \subset \tilde{W}$ e' completamento non degenere se e' estensione di DIMENSIONE MINIMA.

→ PIANO IPERBOLICO

Sia H un PIANO IPERBOLICO. Allora

- $\dim H = 2$
- $\phi|_H$ non degenere
- $\phi|_H$ non anisotropo

Esiste B BASE IPERBOLICA : $m_B(\phi|_H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

→ COMPLETAMENTO ESISTE, UNICO

Si costruisce il completamento $W \subset U \perp H_1 \perp \dots \perp H_k$

$\underline{z} \in Rad(W) \Rightarrow \underline{d}$ rappresentante di $\underline{z}^*$

$\underline{z}, \underline{d}$ formano piano IPERBOLICO

DECOMPOSIZIONE di WITT

- Alla luce del TEOREMA di ESTENSIONE e della costruzione di COMPLETAMENTI NON DEGENERI si arriva alla DECOMPOSIZIONE di WITT.

INDICE di WITT

L'indice di Witt per (V, ϕ) non degenere e':

$$w(\phi) := \max\{\dim W \mid W \text{ ssp. } V,\ \phi|_W = 0\}$$

- In particolare si osserva:

$$w(\phi) = 0 \iff \phi \text{ anisotropo}$$

- Sia W ssp. V che "realizza $w(\phi)$": $\dim W = w(\phi)$, $\phi|_W \equiv 0$.

Il suo completamento sarà

$$\hat{W} = H_1 \perp \ldots \perp H_w \qquad (w = w(\phi))$$

e dato che $\hat{W}$ non degenere:

$$V = (H_1 \perp \ldots \perp H_w)^{\perp} \perp (H_1 \perp \ldots \perp H_w)$$

$$\Rightarrow \quad V = A \perp H_1 \perp \ldots \perp H_w$$

- LEMMA: A anisotropo

DECOMPOSIZIONE di WITT

Una decomposizione di Witt per (V, ϕ) e' nella forma:

$$V = A \perp H_1 \perp \ldots \perp H_w$$

dove H_i piano iperbolico, A anisotropo.

TEOREMA di UNICITA' della DECOMPOSIZIONE di WITT

- $\exists$ decomposizione di Witt: $V = A \perp H_1 \perp \ldots \perp H_w$ con $w = w(\phi)$
- Ogni altra decomposizione ha $w = w(\phi)$ piani isotropi
- Si può costruire un'isometria

$$g: H_1 \perp \ldots \perp H_w \rightarrow H_1' \perp \ldots \perp H_w'$$

estendibile a $f \in O(\phi)$.

RIDUZIONE STUDIO ISOMETRIA ad ANISOTROPO

Siano (V, ϕ) e (V, ϕ') non degeneri, $w(\phi) = w(\phi')$.

Allora $V = A \perp H_1 \perp \dots \perp H_w$
$ \overset{!}{=} A' \perp H_1' \perp \dots \perp H_w'$

ϕ e ϕ' ISOMETRICI $\iff$ A e A' sono ISOMETRICI

INVARIANTI in $\mathbb{R}$

- La SEGNATURA e' gia' invariante completo, usando la discussione sulle basi ortonormali.
- Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (V, ϕ) non degenere. Allora:

$$V = A \perp H_1 \perp \dots \perp H_w \qquad (w = w(\phi))$$

dove A anisotropo $\Rightarrow$ A definito.

La coppia $(w(\phi), \sigma(A))$ e' INVARIANTE COMPLETO.

INVARIANTI in $\mathbb{C}$

- $\dim \mathrm{Rad}(\phi)$ e' gia' invariante completo, dalla discussione sulle basi ortonormali.
- Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (V, ϕ) non degenere. Allora i prodotti scalari sono tutti isometrici:
  - $\dim V$ pari: $V = H_1 \perp \dots \perp H_w$ sempre isometrici
  - $\dim V$ dispari: $V = A \perp H_1 \perp \dots \perp H_w$ $\dim A = 1$, sempre isometri

TRASLAZIONI AFFINI

▸ TRASLAZIONE ($\mathcal{T}(V)$)

- Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$.
  Dato $\underline{w} \in V$, definisco la TRASLAZIONE:

$$\tau_{\underline{w}} : V \longrightarrow V$$
$$\underline{v} \longrightarrow \underline{v} + \underline{w}$$

- Sia $\mathcal{T}(V)$ l'insieme delle TRASLAZIONI.
  In particolare, $(\mathcal{T}(V), \circ)$ e' un gruppo di trasformazioni dove:

$$\tau : (V, +) \longrightarrow (\mathcal{T}(V), \circ)$$

  e' un ISOMORFISMO di GRUPPI.

▸ GRUPPO delle TRASFORMAZIONI AFFINI ($Aff(V)$)

- Definisco il GRUPPO delle TRASFORMAZIONI AFFINI come:

$$Aff(V) := Span(GL(V) \cup \mathcal{T}(V))$$

- PROPRIETÀ

  1) Dati $g \in GL(V)$, $\underline{w} \in V$:
     - $g \circ \tau_{\underline{w}}(\underline{v}) = \tau_{g(\underline{w})} \circ g(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$
     - $(\tau_{\underline{w}} \circ g)^{-1}(\underline{v}) = \tau_{g^{-1}(-\underline{w})} \circ g^{-1}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$

     $\Rightarrow$ Sia $f \in Aff(V)$, $f = g_1 \circ \dots \circ g_k$ con $g_i \in GL(V) \cup \mathcal{T}(V)$
     Allora $f = \tau_{\underline{w}} \circ g$ per qualche $\underline{w} \in V$, $g \in GL(V)$

  2) Sia $f \in Aff(V)$, se $f = \tau_{\underline{w}} \circ g = \tau_{\underline{w}'} \circ g'$ allora
     $\underline{w} = \underline{w}'$ e $g = g'$.

     $\Rightarrow$ La scrittura per $f \in Aff(V)$, $f = \tau_{\underline{w}} \circ g$ e' UNICA.

- ISOMORFISMO con $Aff(V)$
  Considero il gruppo $(V \times GL(V), *)$ dove:

$$(\underline{v}, g) * (\underline{w}, h) = (g(\underline{w}) + \underline{v}, g \circ h)$$

  Allora

$$\phi : (V \times GL(V), *) \longrightarrow (Aff(V), \circ)$$
$$(\underline{w}, g) \longrightarrow \tau_{\underline{w}} \circ g$$

  e' ISOMORFISMO

- **OSSERVAZIONE**: punti speciali nella struttura di SPAZIO VETTORIALE.
- Dato uno spazio vettoriale V, $\underline{0}$ è un punto speciale sotto l'azione di $GL(V)$. Infatti:
- Sia $st(X)$ lo **STABILIZZATORE** di $X \subseteq V$:

$$st(X) = \{ g \in GL(V) \mid g(\underline{v}) = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in X \}$$

Allora $\underline{0}$ è l'unico vettore $\underline{v}$ tale che $st(\underline{v}) = GL(V)$

- Considerando invece $Aff(V)$, non ci sono più punti speciali.
  - → SP. VET: se $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ non nulli, $\exists\, g \in GL(V)$:

    $g(\underline{v}) = \underline{v}'$ e $g(\underline{0}) = \underline{0}$
  - → AFFINE: dati $\underline{v}, \underline{v}' \in V$, esiste la traslazione $f(\underline{v}) = \underline{v}'$

    $\Rightarrow st(\underline{v}) \simeq st(\underline{v}')$

    $\Rightarrow$ $\underline{0}$ perde la sua specialità, con $Aff(V)$

- **RAPPRESENTAZIONE in $\mathbb{K}^n$**
- TRASFORMAZIONI AFFINI

  Ogni trasformazione affine in $\mathbb{K}^n$ è nella forma:

$$f(X) = PX + B \qquad \text{con } P \in GL(n, \mathbb{K}),\ B \in \mathbb{K}^n$$

- INCLUSIONE in $\mathbb{K}^{n+1}$

  Sia $\mathbb{K}^{n+1}$ con coordinate canoniche: $Y = (y_1 \dots y_n, y_{n+1})^T$

  Sia $\mathbb{K}^n$ con coordinate canoniche: $X = (x_1 \dots x_n)^T$

  Allora fisso l'inclusione $\mathbb{K}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$$

indicando:

$$\mathcal{P} = \{ Y = (y_1 \dots y_{n+1})^T \mid y_{n+1} = 1 \}$$

$$G_{\mathcal{P}} = \{ g \in GL(n+1, \mathbb{K}) \mid g(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \}$$

In particolare,

$$G_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} P & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, \mathbb{K}) \mid P \in GL(n, \mathbb{K}),\ B \in \mathbb{K}^n \right\}$$

- ISOMORFISMO $Aff(\mathbb{K}^n) \to G_\rho$

Considero: $\Psi : (\mathbb{K}^n \times GL(n,\mathbb{K}), *) \longrightarrow (G_\rho, \cdot)$

$$(B, P) \longrightarrow \begin{pmatrix} P & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un ISOMORFISMO di GRUPPI.

- PROBLEMA: $Aff(V)$ non mantiene la struttura di spazio vettoriale. Troviamo quindi una struttura differente preservata dal gruppo delle trasformazioni affini.

SPAZI AFFINI

SPAZIO AFFINE

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, A insieme non vuoto di V.

A ha STRUTTURA di SPAZIO AFFINE se è data l'applicazione:

$\Phi : A \times A \to V$

$\Phi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$

con le proprietà:

1) $\forall P \in A$, $\Phi_P : A \to V$, $Q \to \overrightarrow{PQ}$ è BIGETTIVA

2) $\forall P \in A$, $\Phi_P(P) = 0$

3) $\forall P, Q, R \in A$: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = 0$

NOTAZIONE

$P \in A$ = punto

$\underline{v} \in V$ = vettore

- **STRUTTURA AFFINE STANDARD su V**

Prendendo $A = V$, allora A spazio affine con:

$$\overrightarrow{PQ} := Q - P$$

- **PROPRIETÀ**

- $\forall P, Q \in A$, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$
- Sia $\underline{v} \in V$, $P \in A$. Allora $\boxed{Q := P + \underline{v}}$ indica il punto tale che $\underline{v} = \overrightarrow{PQ}$
- $\forall P \in A$, $\underline{v}, \underline{w} \in V$: $P + (\underline{v} + \underline{w}) = (P + \underline{v}) + \underline{w}$

SOLLEVAMENTO su SP. AFFINE dello SP. VETTORIALE

Per ogni $P \in A$, individuiamo tramite Φ_P una copia di V che ha per origine P.

Possiamo quindi considerare $A \times A = \bigcup_{P \in A} (\{P\} \times A)$ come **FAMIGLIA di SPAZI VETTORIALI**.

COMBINAZIONI AFFINI di PUNTI

- Siano $P_0, \dots, P_k$ punti di A ; siano $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$.

Fisso P_0 e considero il punto:

$$P_0 + \sum_{i=0}^{k} a_i \overrightarrow{P_0P_i} \in A$$

cerco le condizioni necessarie / sufficienti affinché la scrittura del punto considerato non dipenda dalla scelta di P_i fissato.

Chiedo che $P_i + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_iP_j}$ sia lo stesso punto $\forall i = 0, \dots, k$

Dalla proprietà 2: $\overrightarrow{P_0P_j} + \overrightarrow{P_jP_i} + \overrightarrow{P_iP_0} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{P_0P_j} = \overrightarrow{P_0P_i} + \overrightarrow{P_iP_j}$

$$P_0 + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_0P_j} = P_0 + \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)\overrightarrow{P_0P_i} + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_iP_j}$$

$$= P_i + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_iP_j}$$

$$\iff \sum_{j=0}^{k} a_j = 1$$

NON RESTRITTIVO, perché $\overrightarrow{P_0P_0} = 0 \Rightarrow a_0$ può assumere qualsiasi valore

- Una COMBINAZIONE AFFINE di PUNTI è:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j P_j := P_0 + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_0P_j} \quad \text{con} \quad \sum_{j=0}^{k} a_j = 1$$

è BEN DEFINITA per l'osservazione precedente.

- PUNTO MEDIO e BARICENTRO

Sia $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$. Allora dati $P_0, \dots, P_{n-1}$ punti di A

$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} P_i$ è combinazione affine : BARICENTRO

SOTTOSPAZI AFFINI

Sia E sottoinsieme di A. E è SOTTOSPAZIO AFFINE se:
E è vuoto oppure E è chiuso per combinazioni affini

- Sia X insieme non vuoto di A. Lo SPAZIO AFFINE GENERATO da X è $\boxed{\mathrm{Span}(X)}$, definito come intersezione dei sottospazi affini di A contenenti X e come l'insieme di combinazioni affini di punti di X.

- SOLLEVAMENTO

1) Sia W sottospazio vettoriale di V, P_0 punto di A.

$$E := P_0 + W \quad \text{sottospazio affine di A}$$

2) Sia E sottospazio affine di A non vuoto, P_0 punto di A.

$$W_{P_0} := \Phi_{P_0}(E) \quad \text{sottospazio vettoriale di } V$$

3) $W := W_{P_0}$ non dipende dalla scelta di P_0.

$\Rightarrow$ $\boxed{W =: T(E)}$ è GIACITURA o SPAZIO VETTORIALE TANGENTE di E

- Sia E sottospazio affine non vuoto di A.
  In particolare $\Phi_1 : E \times E \to T(E)$ realizza E come sottospazio affine di $T(E)$.
  $\longrightarrow$ su A AFFINE STANDARD di V, $E = \tau_{\underline{v}}(W)$ per $\underline{v} \in V$

DIMENSIONE

- Sia E sottospazio affine di A (su V). La DIMENSIONE è definita:

$$\dim E := \dim T(E)$$

- NOMENCLATURA
  - RETTA AFFINE: sottospazio affine di dimensione 1
  - INCIDENTI: sottospazi affini E, E' : $E \cap E' \neq \emptyset$
  - PARALLELI: sottospazi affini E, E' : $T(E) \subseteq T(E')$
  - SGHEMBI: sottospazi affini E, E' non incidenti né paralleli

FORMULA di GRASSMANN AFFINE

- SOMMA
  Siano E, F sottospazi affini di A non vuoti. La loro SOMMA è:

$$E + F = \operatorname{Span}(E \cup F)$$

- GRASSMANN
  - E ed F incidenti:

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$$

  - $E \cap F = \emptyset$:

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) + 1$$

$$\Rightarrow \quad T(E+F) = T(E) + T(F) + \operatorname{Span}(\overrightarrow{PQ}) \quad \text{con } P \in E,\ Q \in F$$

APPLICAZIONI AFFINI

- Siano (A, Φ) e (B, Ψ) spazi affini sui $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W. Allora $f: A \to B$ e' APPLICAZIONE AFFINE se:
  $$\forall\ Q = \sum a_i P_i \implies f(Q) = \sum_i a_i f(P_i)$$

- SOLLEVAMENTO
  1) Sia $g: V \to W$ lineare. Siano $P \in A$, $Q \in B$. Allora:
  $$f = \Psi_Q^{-1} \circ g \circ \Phi_P \quad \text{e' AFFINE}$$
  2) Sia $f: A \to B$ affine tale che $f(P) = Q$. Allora:
  $$g_P = \Psi_Q \circ f \circ \Phi_P^{-1} \quad \text{e' LINEARE}$$
  3) L'applicazione $g_P =: g$ non dipende da P.
  $\Rightarrow$ $\boxed{g = df}$ e' l'APPLICAZIONE LINEARE TANGENTE o DIFFERENZIALE.

- OSS. ogni applicazione affine manda sottospazi affini in sottospazi affini di dimensione minore o uguale.

- ISOMORFISMO AFFINE
  Sia $f: A \to B$. E' ISOMORFISMO AFFINE se e' un'applicazione affine, BIGETTIVA e con INVERSA AFFINE.
- OSS. f isomorfismo affine $\iff$ f affine, df isomorfismo

INDIPENDENZA AFFINE

- Siano $P_0, \dots, P_k \in A$. I punti sono AFFINAMENTE INDIPENDENTI se $\vec{P_0P_1}, \dots, \vec{P_0P_k}$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI.

- BASE AFFINE
  Sia $\dim A = n$. Allora una BASE AFFINE di A e' composta da $n+1$ punti affinemente indipendenti, $P_0, \dots, P_n$.

$\Rightarrow$ $\forall\ Q \in A$, $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i$ e' combinazione lineare ESISTENTE e UNICA.

$\Rightarrow$ Per $A = \mathbb{K}^n$, su $V = \mathbb{K}^n$, la BASE CANONICA AFFINE e'
$$\{e_0 = 0, e_1, \dots, e_n\}$$

- PASSAGGIO alle COORDINATE

Sia A su V tale che $\dim A = n$, $\{P_0, \dots, P_n\}$ base affine di A.

Allora:

$$Q = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j \longrightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j e_j \in \mathbb{K}^n$$

è PASSAGGIO alle COORDINATE AFFINI.

▶ RAPPORTO SEMPLICE

- Sia A su V una RETTA AFFINE: $\dim A = 1$.

Considero una terna di punti distinti di A: $\{P_1, P_2, P_3\}$.

Considerando P_1, P_2 base affine:

$$P_3 = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{per un unico } \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0,1$$

Definisco RAPPORTO SEMPLICE della terna ordinata di punti:

$$\lambda := [P_1 ; P_2 ; P_3]$$

- OSS. 1: Permutazione dei punti

Considero l'insieme delle permutazioni, S_3. Definisco:

$$\lambda_\sigma := [P_{\sigma(1)} ; P_{\sigma(2)} ; P_{\sigma(3)}]$$

Allora, sapendo che S_3 è generato da $(1\ 2\ 3)$ e $(2\ 3)$, in $A = V$:

$$\lambda = \frac{P_3 - P_1}{P_2 - P_1} \qquad \lambda_{(2\,3)} = \frac{P_2 - P_1}{P_3 - P_1} = \mu$$

$$\lambda_{(1\,2\,3)} = \frac{1}{1-\lambda} \qquad \lambda_{(1\,2)} = \frac{1}{1-\mu}$$

$$\lambda_{(2\,3\,1)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\lambda}} \qquad \lambda_{(1\,3)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\mu}}$$

- OSS. 2: Moltiplicazione per scalari

$$\forall t \neq 0 : \quad [tP_1 ; tP_2 ; tP_3] = [P_1 ; P_2 ; P_3] = \lambda$$

– INTERPRETAZIONE GRAFICA sui COMPLESSI

Sia $A = \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$, con struttura supportata da $\mathbb{R}^2$.

A meno di trasformazioni affini (SIMILITUDINI) supponiamo:

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = z$$

$$\Rightarrow \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = z := a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

Si osserva che:

$b = 0 \iff z_0, z_1, z_2$ allineati sulla retta reale

allora:

$$\left\{ \left(z, \frac{1}{1-z}, \frac{1}{1-\frac{1}{1-z}} \right) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \right\} \Big/ A_3$$

rappresenta le CLASSI dei TRIANGOLI rispetto a SIMILITUDINI.

- CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA $f \in Aff(A)$

- Sia A uno spazio affine su V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Le proprietà verificate da $f \in Aff(A)$; gruppo delle trasformazioni affini.

1) f è BIGETTIVA
2) f manda sottospazi affini a sottospazi affini con stessa dimensione.
3) f manda rette in rette preservando il rapporto semplice
4) f manda rette in rette, $\exists\, r$ retta: $f|_r$ preserva rapporto semplice
5) f manda rette in rette

- TEOREMA FONDAMENTALE della GEOMETRIA AFFINE

Sia $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, $\dim A \geq 2$.

Sia $f: A \to A$ BIGETTIVA, allora:

a) f manda rette in rette $\Rightarrow$ f manda ssp. affini in ssp. affini
   [5 => 2]

b) f manda rette in rette, $\exists\, r : f|_r$ preserva rapporto s. $\Rightarrow$ f è affine
   [4 => $f \in Aff(A)$]

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f manda rette in rette $\Rightarrow$ f è affine
   [5, $\mathbb{R}$ => $f \in Aff(A)$]

QUADRICHE

▸ QUADRICHE

- Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{K}^n$ spazio affine standard su $V = \mathbb{K}^n$

Data una funzione polinomiale di grado 2:

$$p(X) = p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

allora la **QUADRICA** e' il suo LUOGO DI ZERI:

$$Z = Z(p) = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid p(X) = 0 \}$$

- Se $n = 2$ la quadrica e' chiamata **CONICA**.

▸ STUDIO π

- Sia $E(\mathbb{K})$ l'insieme delle equazioni polinomiali di grado 2.

Sia $Q(\mathbb{K})$ l'insieme dei luoghi di zeri delle quadriche in $\mathbb{K}^n$.

Definisco allora $\pi : E(\mathbb{K}) \longrightarrow Q(\mathbb{K})$ surgettiva.

$$p \longrightarrow Z(p)$$

- Cerco condizione per $Z(p_1) = Z(p_2)$:

$$Z(p_1) = Z(p_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \quad p_1 = \lambda p_2$$

Considerando questa proprieta' come relazione d'equivalenza ($\sim$):

Ridefinisco π $\quad \pi : E(\mathbb{K})/_\sim \longrightarrow Q(\mathbb{K})$

$$[p] \longrightarrow Z(p)$$

- E' bigettiva?
  - → $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: si, e' bigettiva
  - → $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: no, e' bigettiva solo per ipersuperfici (non degeneri).

▸ STUDIO $Q(\mathbb{K})/\sim_a$

- OSS: se $Z(p)$ quadrica e $f \in Aff(\mathbb{K}^n) \Rightarrow f(Z(p))$ quadrica:

$$f(Z(p)) = Z(p \circ f^{-1})$$

- EQUIVALENZA AFFINE

Definisco l'equivalenza affine in $Q(\mathbb{K})$:

$$Z_1 \sim_a Z_2 \iff Z_1 = f(Z_2)$$

Dato che π surgettiva, sollevo la relazione su: $E(\mathbb{K})/\sim$:

$$p_1 \sim_a p_2 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\},\ f \in Aff(A) : \quad p_2 = \lambda p_1 \circ f^{-1}$$

$\Rightarrow$ Studieremo $E(\mathbb{K})/\sim_a$.

- RISCRITTURA in $\mathbb{K}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$

- Identificando $\mathbb{K}^n \to \mathcal{P} = \{ \underline{x} \in \mathbb{K}^{n+1} : x_{n+1} = 1 \}$

ho che $Aff(\mathbb{K}^n) \longrightarrow G_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{K}) \mid P \in GL(n, \mathbb{K}), D \in \mathbb{K}^n \right\}$

- L'equazione di una quadrica in $\mathbb{K}^n$ e':

$$p(X) = X^T A X + 2B^T X + c \qquad \text{con } A \in S(n, \mathbb{K}),\ B \in \mathbb{K}^n,\ c \in \mathbb{K}$$

identificando in $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & c \end{array}\right) \longrightarrow p(X) = (X^T \ 1)\, M \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Il problema dello studio per equivalenza affine e' riscritto:

$$M \sim_a M' \iff \exists \begin{pmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q \mid P \in GL(n, \mathbb{K}) \text{ e } D \in \mathbb{K}^n;\ \lambda \in \mathbb{K} : \quad M' = \lambda Q^T M Q$$

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 2$

Si trovano innanzitutto degli INVARIANTI:

- (rank A, rank M) e' invariante
- Proprietà di AVERE CENTRO e' invariante

M ha CENTRO se $\exists$ traslazione $\left(\begin{array}{c|c} I & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in G_{\mathcal{P}}$ tale che:

$$AD = -B \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} I & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^T M \left(\begin{array}{c|c} I & D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & c' \end{array}\right)$$

Allora studio i diversi casi:

- CON CENTRO: $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & c \end{array}\right)$, moltiplico per $1/c$, normalizzo $A = A^T$
  - $(2,3) \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ ELLISSI e IPERBOLI COMPLESSE
  - $(2,2) \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$ RETTE COMPLESSE INCIDENTI
  - $(1,2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = 0$ RETTE COMPLESSE PARALLELE
  - $(1,1) \Rightarrow x_1^2 = 0$ RETTA COMPLESSA

- **SENZA CENTRO** : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$, traslo e normalizzo $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x_1^2 + 2x_2 = 0$ PARABOLE AFFINI COMPLESSE

▸ **$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$**

- Noto che (rank A, rank M) è ancora INVARIANTE per $\sim_a$.
- Avere o meno CENTRO è ancora INVARIANTE per $\sim_a$.

→ se nel caso complesso rk è INVARIANTE COMPLETO, per $\mathbb{R}$ vale la segnatura, ma questa NON è invariante per moltiplicazione per scalari negativi.

⇒ INDICE di WITT è INVARIANTE per $\sim_a$.

Studio i casi possibili:

- **SENZA CENTRO** : (1,0), (3,1) → PARABOLE REALI
- **CON CENTRO** : (2,0), (3,1) → ELLISSI REALI $\quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$

(2,1), (3,1) → IPERBOLI REALI $\quad x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$

(2,0), (3,0) → $\emptyset$ $\quad x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$

(2,1), (2,1) → RETTE INCIDENTI $\quad x_1^2 - x_2^2 = 0$

(2,0), (2,0) → PUNTO $\quad x_1^2 + x_2^2 = 0$

(1,0), (2,1) → RETTE PARALLELE $\quad x_1^2 - 1 = 0$

(1,0), (2,0) → $\emptyset$ $\quad x_1^2 + 1 = 0$

(1,0), (1,0) → RETTA (doppia) $\quad x_1^2 = 0$