

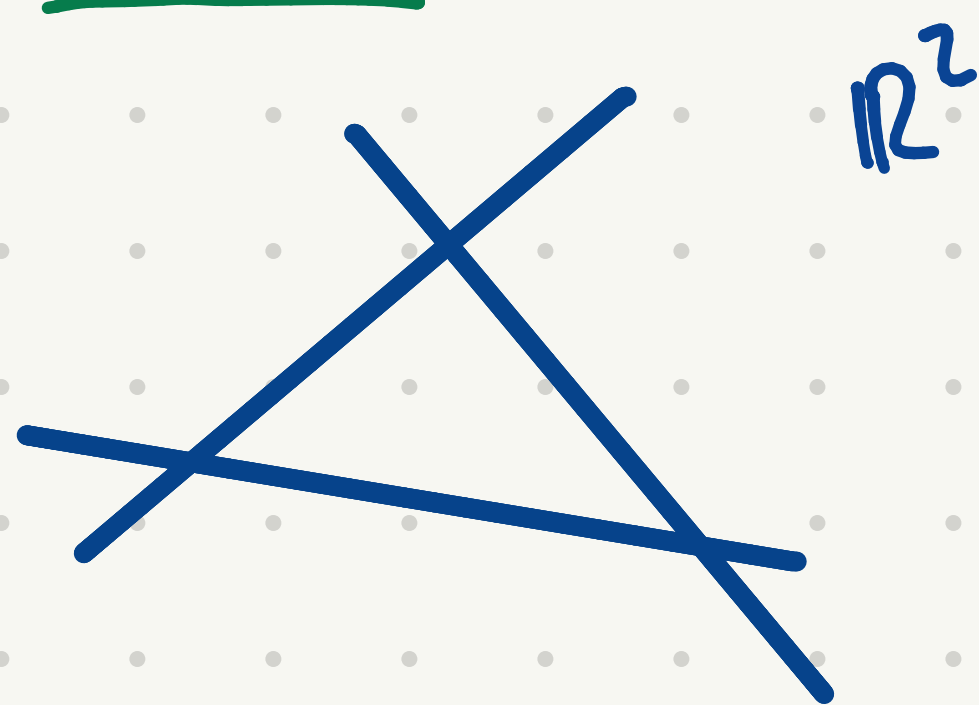
COSE ~ II SEMESTRE: HYPERPLANE ARRANGEMENTS

DEF. Arrangiamenti di Iperpiani

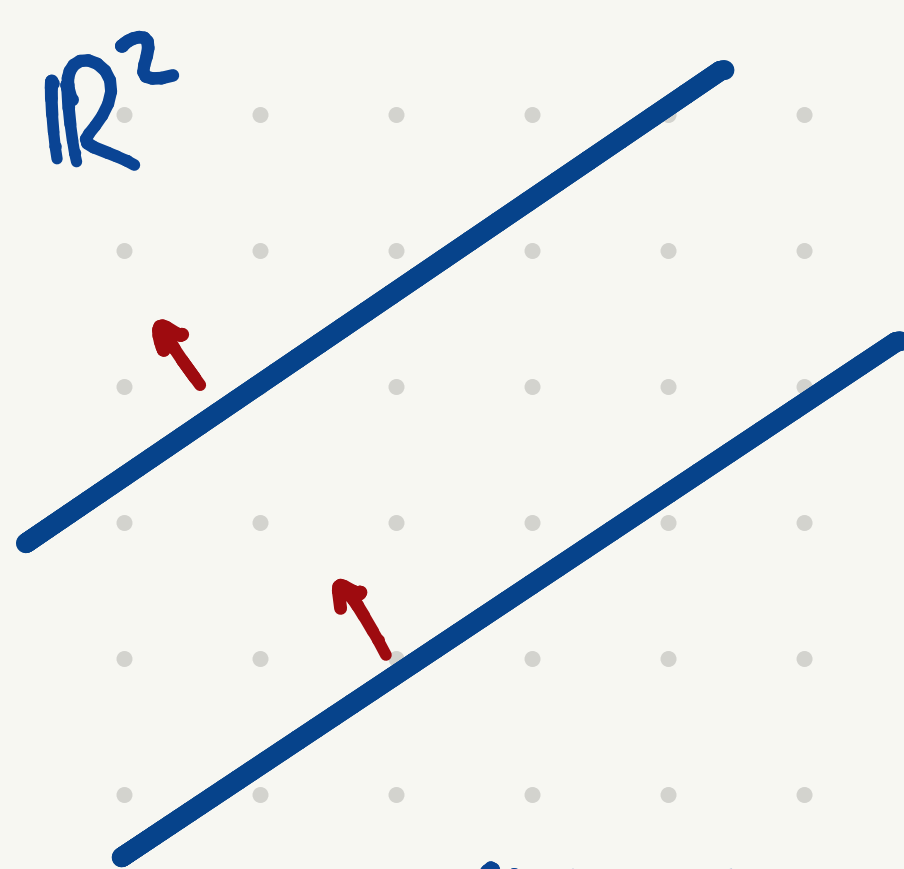
Definiamo $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_m\}$ insieme finito di iperpiani di $\mathbb{R}^d$ (sia lineari che affini). Diciamo che:

- $\mathcal{A}$ CENTRALE se $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$ (per lineari $\bigcap H_i = \{0\}$).
- $\mathcal{A}$ ESSENZIALE se i vettori normali di elementi di $\mathcal{A}$ generano lo spazio $\mathbb{R}^d$.

ESEMPLI



centrale



non essenziale

- OSS: sia $X = \text{span}(\text{vett normali di elementi in } \mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}^d$.

Si può considerare l'ESSENZIALIZZAZIONE:

$$\text{ess}(\mathcal{A}) := \{H \cap X \mid H \in \mathcal{A}\} \quad \text{arr. di iperpiani in } X$$

- ES: nel caso precedente



DEF. Regione di $\mathcal{A}$

Una REGIONE di $\mathcal{A}$ è una componente connessa di $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$.

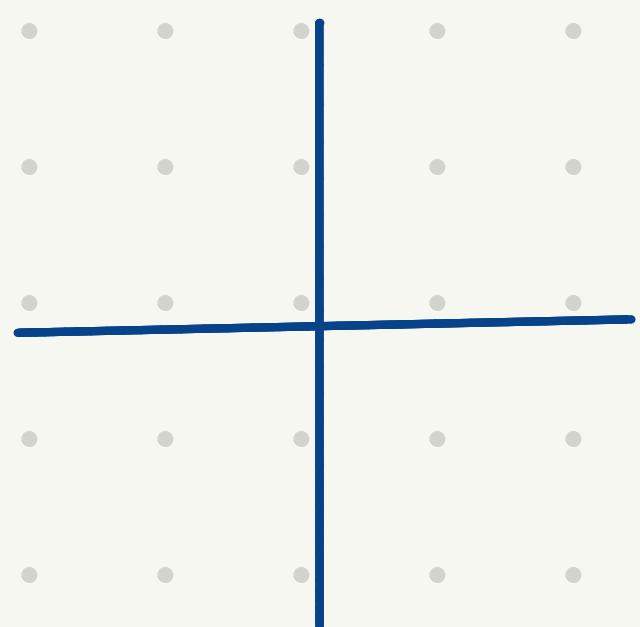
L'insieme delle regioni è $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ ed $r(\mathcal{A}) := \#\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Una regione R è RELATIVAMENTE LIMITATA se:

$\mathbb{R}^n \times$ è limitata (cioè limitata nell'essenziale).

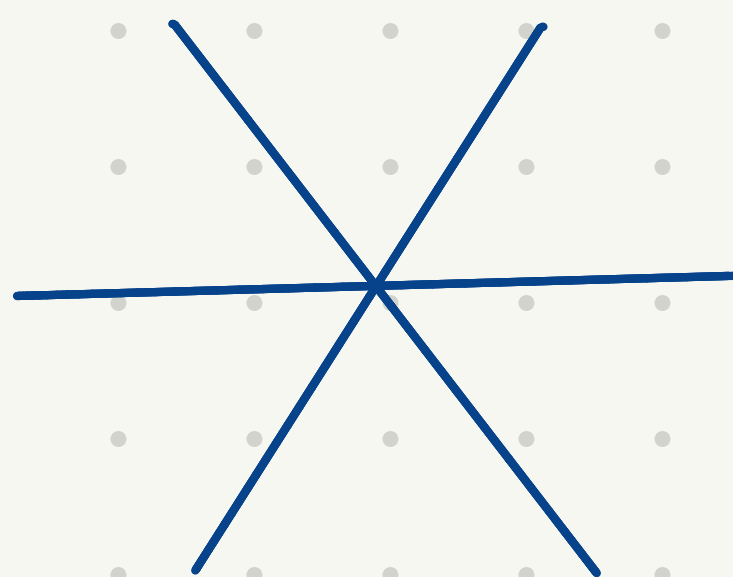
Chiamiamo $b(\mathcal{A}) := \#$ regioni nel. limitata di $\mathcal{A}$.

• ESEMPIO



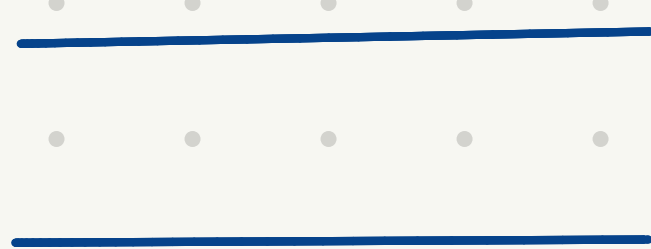
$$r(\mathcal{A}) = 4$$

$$b(\mathcal{A}) = 0$$



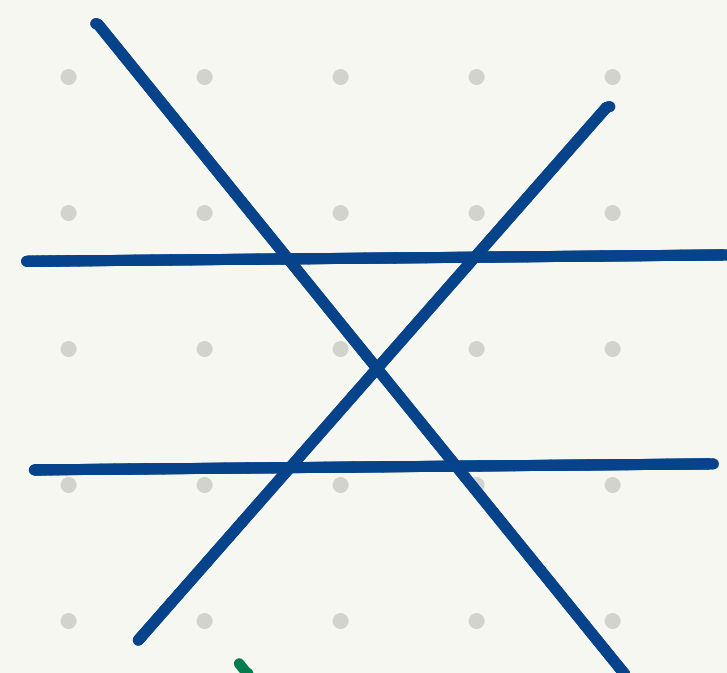
$$r(\mathcal{A}) = 6$$

$$b(\mathcal{A}) = 0$$



$$r(\mathcal{A}) = 3$$

$$b(\mathcal{A}) = 1$$



$$r(\mathcal{A}) = 10$$

$$b(\mathcal{A}) = 2$$

PROBLEMA: calcolare $r(\mathcal{A})$ e $b(\mathcal{A})$.

• ESEMPLI

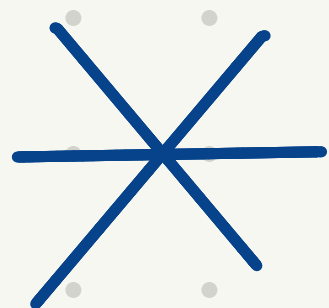
1) COORDINATE ARRANGEMENT: $\mathcal{A} = \{x_1=0, \dots, x_n=0\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow r(\mathcal{A}) = 2^n \quad b(\mathcal{A}) = 0$$

2) BRAID ARRANGEMENT: in $\mathbb{R}^n$ con $1 \leq i < j \leq n$, denotato B_n .

Consideriamo tutti gli iperpiani della forma $x_i - x_j = 0$.

Es: $n=3$ l'essenzializzato sarà

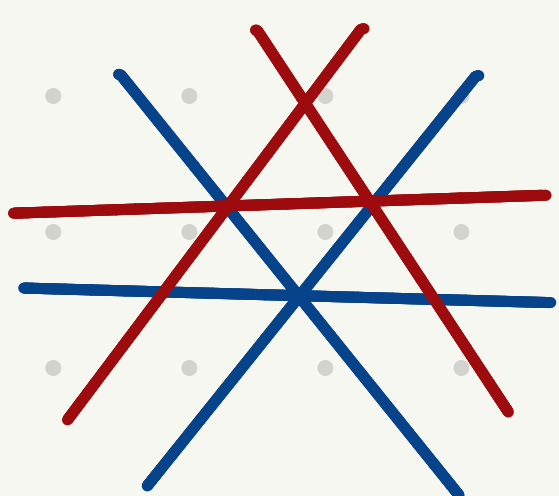


Per calcolare $r(B_n)$ vediamo le coord e il loro ordine crescente.

Otteniamo le permutazioni, quindi $r(B_n) = n!$

3) SHI ARRANGEMENT: si considerano iperpiani $x_i - x_j = 0, 1$.

Es: $n=3$



$$r(\mathcal{A}) = 16$$

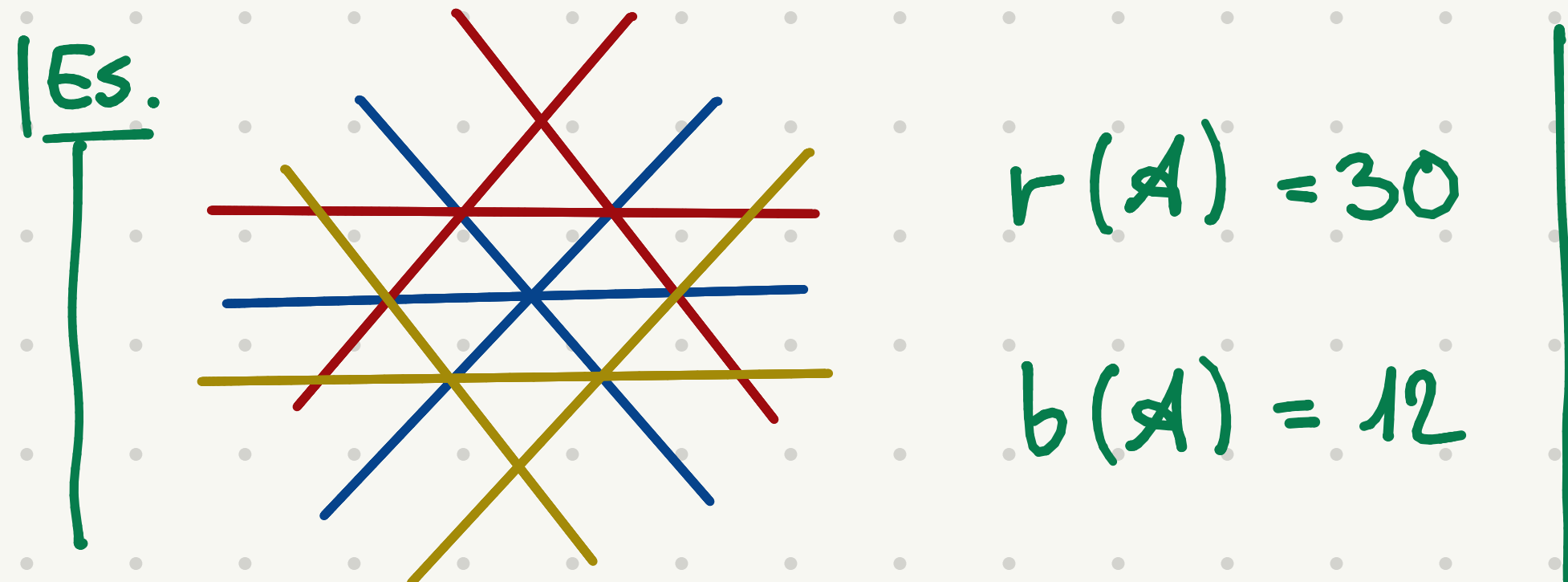
$$b(\mathcal{A}) = 4$$

Si calcolerà che:

$$r(\mathcal{A}) = (n+1)^{n-1}$$

$$b(\mathcal{A}) = (n-1)^{n-1}$$

4) CATALAN ARRANGEMENTS: si considerano $x_i - x_j = -1, 0, 1$.



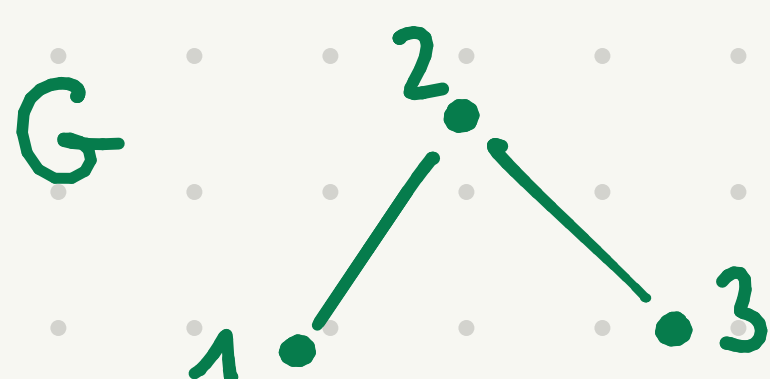
5) LINEAL ARRANGEMENTS: si considerano $x_i - x_j = 1$.

6) GRAPHICAL ARRANGEMENTS: sia $G = (V, E)$:

$$\mathcal{A}_G := \{ x_i - x_j = 0 \mid \{i, j\} \in E \}$$

da cui $b(\mathcal{A}_G) = 0$ e $r(\mathcal{A}_G) = \# \text{ acyclic orient. di } G$

Troviamo la bigezione.



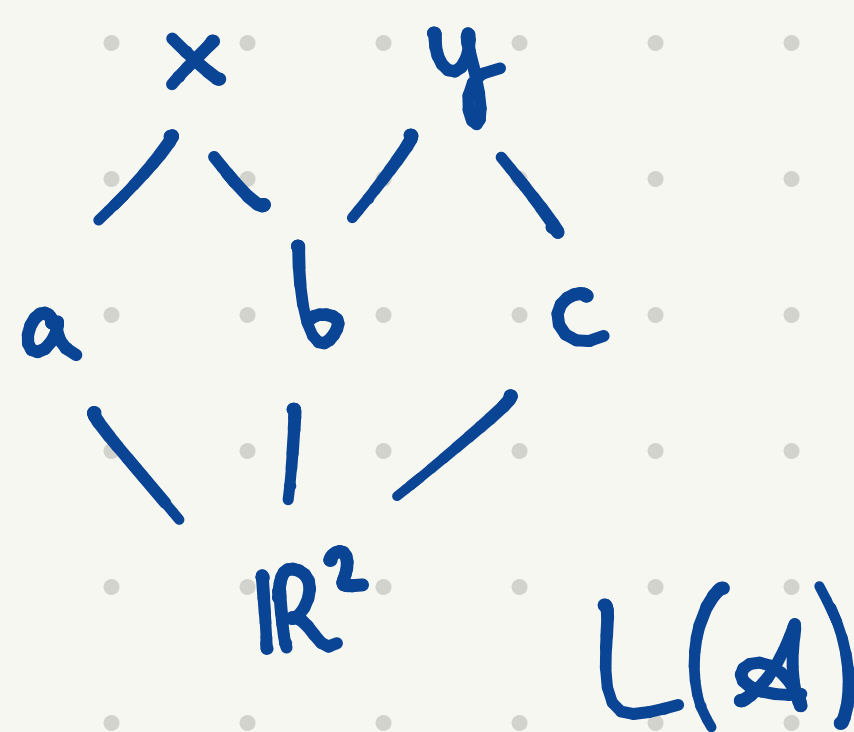
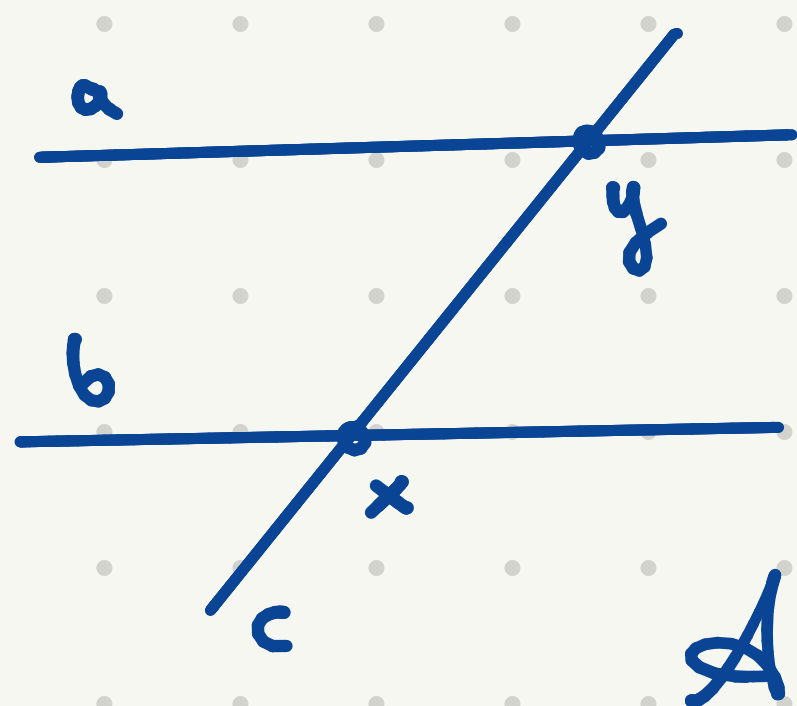
quindi presa una regione, se $x_i < x_j$ allora $i \rightarrow j$ in G orientato.

Dato un arr $\mathcal{A}$ si definisce l' INTERSECTION POSET come

$$L(\mathcal{A}) := (\text{intersezioni } \neq \emptyset \text{ di elem di } \mathcal{A}, \supseteq)$$

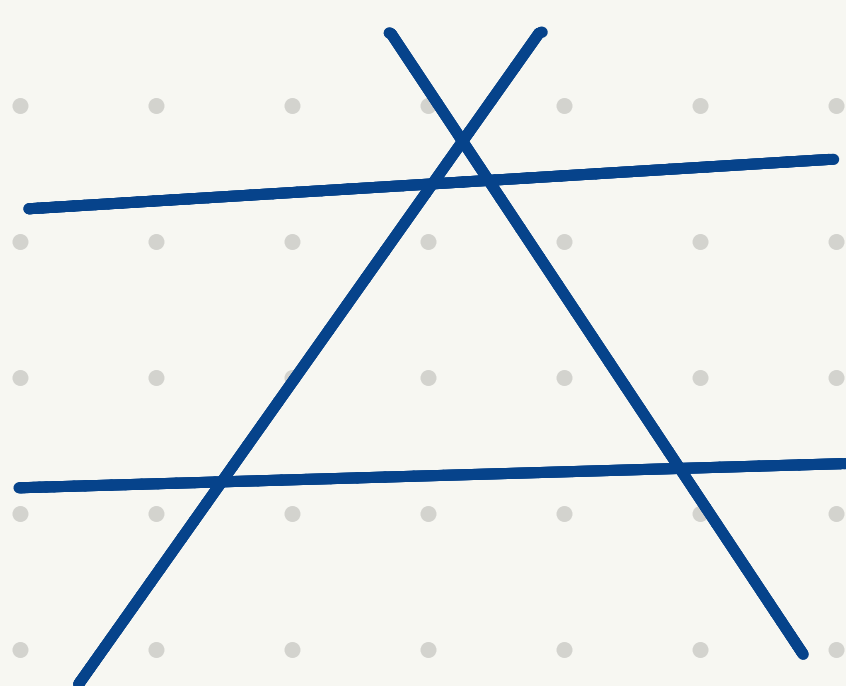
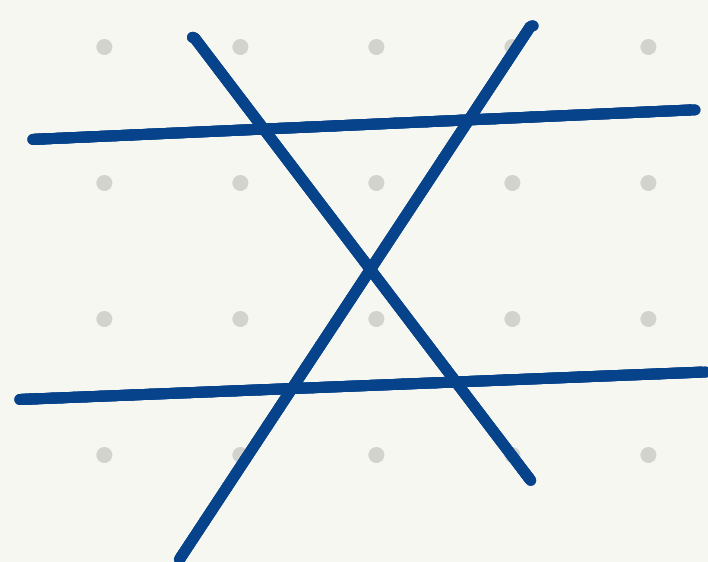
reverse inclusion!

Es.



Oss: $L(\mathcal{A})$ e' un reticolo se $\mathcal{A}$ non e' centrale.

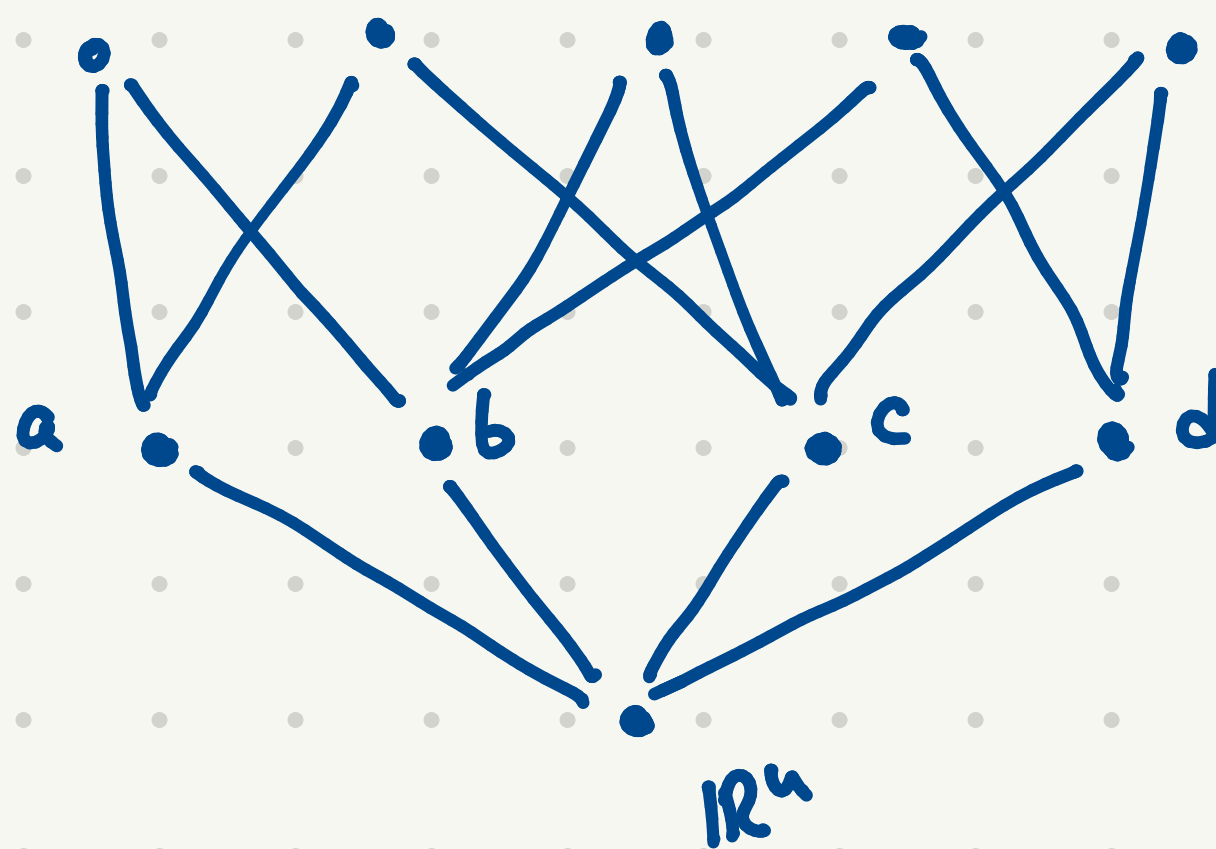
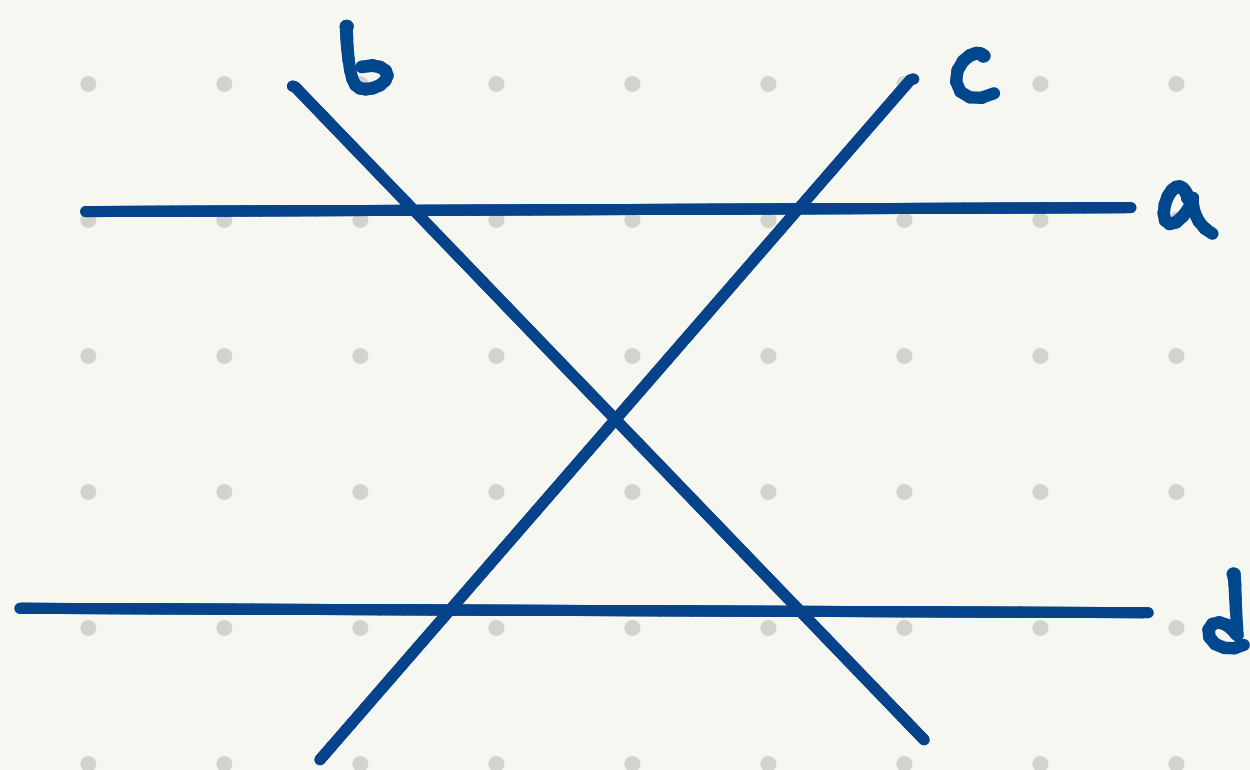
Es.



sono arrangiamenti
differenti ma hanno
stesso poset delle intersezioni!

RECAP: $L(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \mid \mathcal{B} \in \mathcal{A} \right\}$ INTERSECTION POSET

ESEMPIO



► DEF. Sia $(P, \leq)$ poset.

→ y COPRE x ($x < y$) se $\nexists z$ t.c. $x < z < y$ e $x < y$.

→ una catena è SATURATA se $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

→ P GRADUATO se tutte le catene massimali hanno la stessa lunghezza, poniamo $rk(P) = \max \text{lunghezza}$.

► DEF. Funzione Rango

Sia $(P, \leq)$ graduato. Allora la FUNZIONE RANGO $rk(x)$ è:

→ $rk(x) = 0$ se x minimale in P .

→ $rk(x) = rk(y) + 1$ se $y < x$.

► PROPOSIZIONE

Sia $\mathcal{A}$ arrangiamento in $\mathbb{R}^n$. Allora $L(\mathcal{A})$ graduato e:

$$rk(x) = \text{codim}(x) = n - \dim(x) \quad \forall x \in L(\mathcal{A}).$$

► DEF. Poset localmente Finito

Un poset è LOCALMENTE FINITO se ha intervalli finiti.

► DEF. Funzione di Möbius

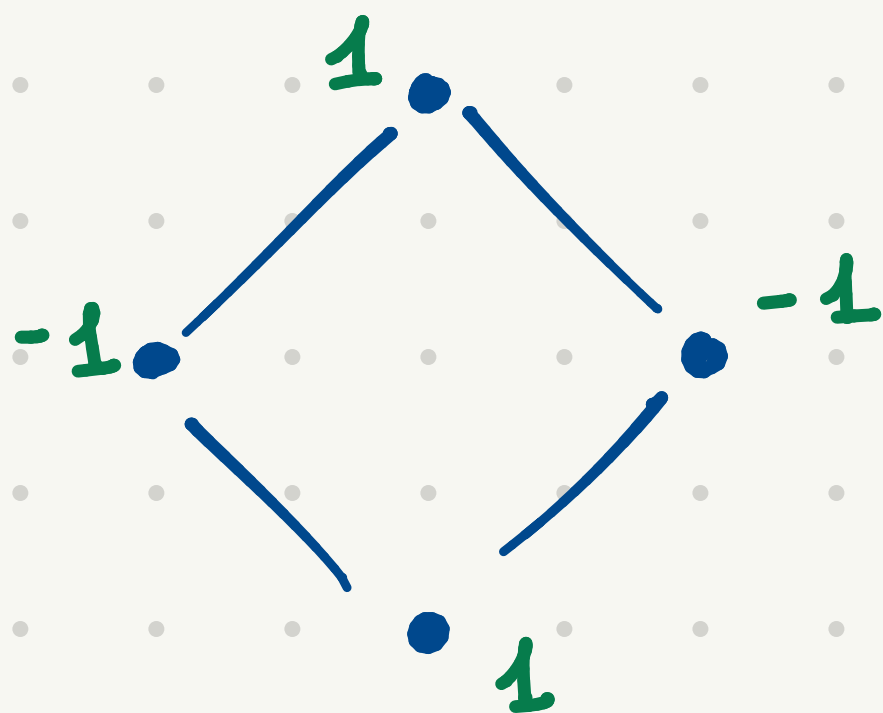
Sia P localmente finito. La FUNZIONE di MöBIUS è una

mappe $\mu: \text{Int}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mu(x, x) = 1 & \forall x \in P. \\ \mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & \text{per ogni } x < y. \end{cases}$$

• OBS: $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$ se $x \neq y$.

ESEMPIO



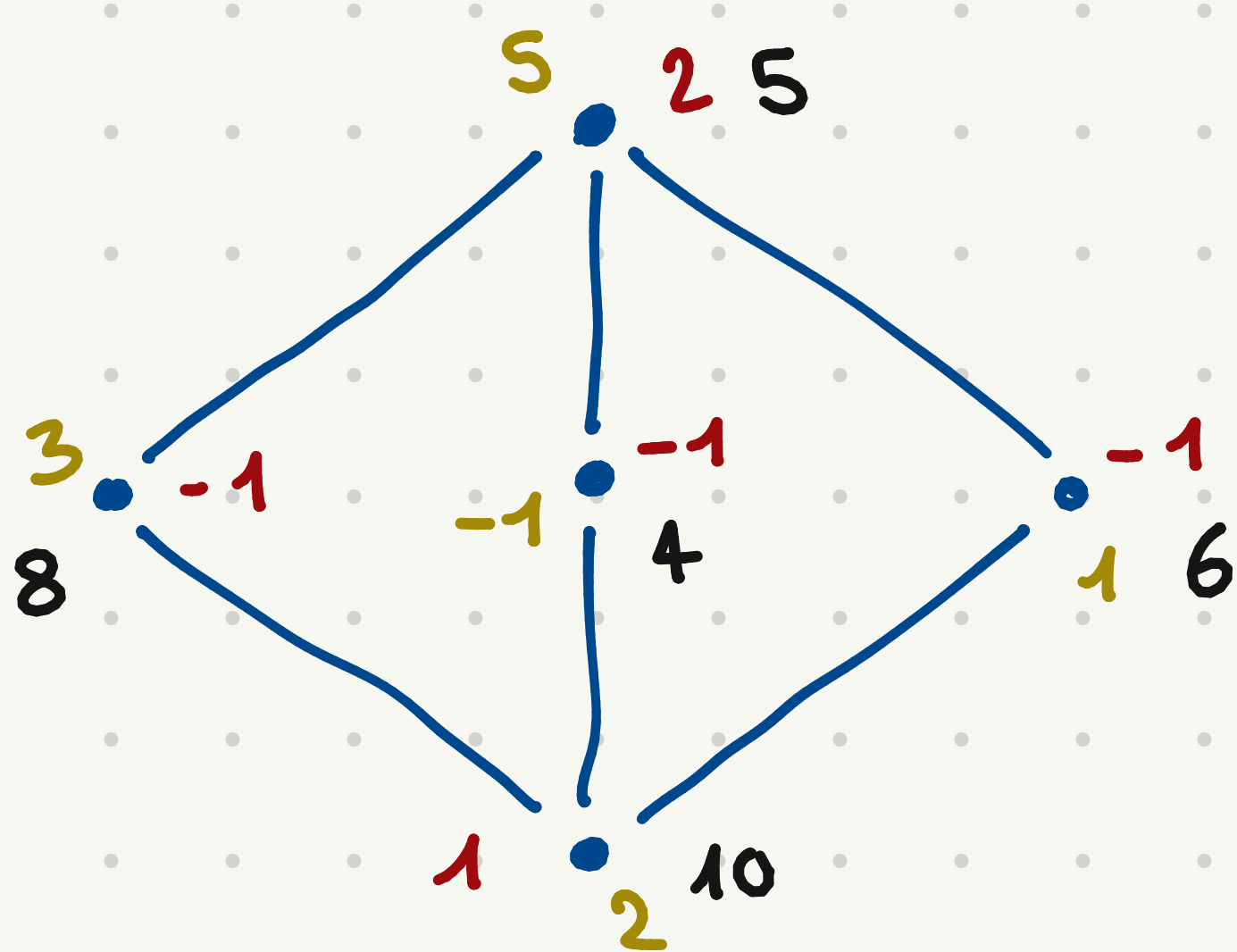
Indicando $\mu(\hat{0}, x)$ si trovano i numeri a sinistre.

TEOREMA Formula di Inversione di Möbius

Sia P finito e μ funzione di Möbius. Siano inoltre $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

- 1) $f(x) = \sum_{y \geq x} g(y)$.
- 2) $g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) f(y)$.

ESEMPIO



Siano $\mu(\hat{0}, x)$, g . Allora f lo calcola con 1. Calcolando con 2 si verifica che funziona.

Questo permette di definire il polinomio caratteristico.

DEF. Polinomio Caratteristico

Sia $\mathcal{A}$ arrangiamento in $\mathbb{R}^n$. Il POLINOMIO CARATTERISTICO è

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(\hat{0}, x) t^{\dim(x)} \quad \rightarrow (\text{codim come ssp } \mathbb{R}^n)$$

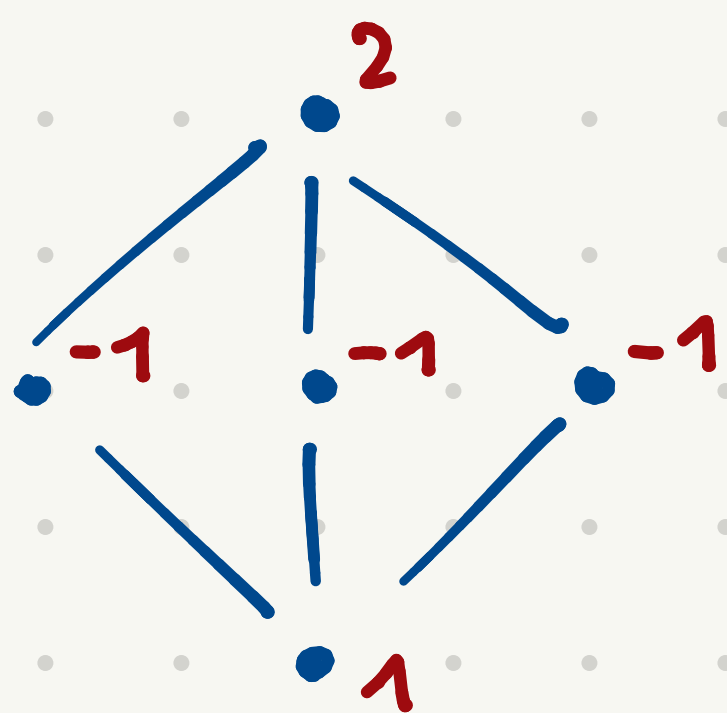
Abbrevieremo $\mu(x) := \mu(\hat{0}, x)$.

Osserviamo alcune proprietà base.

OBS: se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $\chi_A(t) = t^n - (\#A)t^{n-1} + \dots$

► ESEMPIO

In $\mathbb{R}^2$



allora:

$$\chi_A(t) = t^2 - 3t + 2.$$

► ESEMPIO

Consideriamo $A = \{x_i = 0\}_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$L(A) = (2^{[n]}, \subseteq) \quad \text{cioè il Boolean Lattice.}$$

PROP $\chi_A(t) = (t-1)^n$

DIM. Calcoliamo la funzione di Möbius, vogliamo convincerci che in particolare $\mu(y) = (-1)^{\text{rk}(y)}$.

Se $\text{rk}(y) = 0$ allora OK!

Se $\text{rk}(y) = k > 0$ vogliamo mostrare la formula ricorsiva per μ quindi

$$\sum_{\hat{0} \leq z \leq y} (-1)^{\text{rk}(z)} \stackrel{?}{=} 0$$

ma se $\text{rk}(z) = i$ allora ci sono $\binom{k}{i}$

||

scelte per z . Ma allora:

$$\sum_{i \leq k} (-1)^i \binom{k}{i} = 0 \quad \text{da identità nota.}$$

Questo conclude. ■

► PROPRIETÀ di $L(A)$

• DEF.

Sia A arrang. Allora B SOTTOARR di A se $B \subseteq A$.

Definiamo in particolare per $x \in L(\mathcal{A})$:

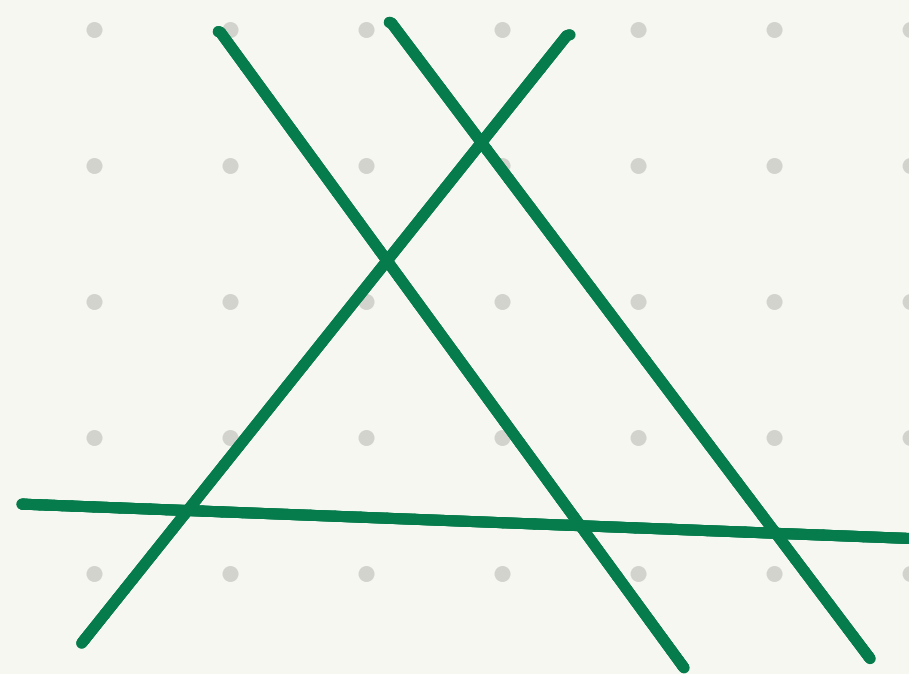
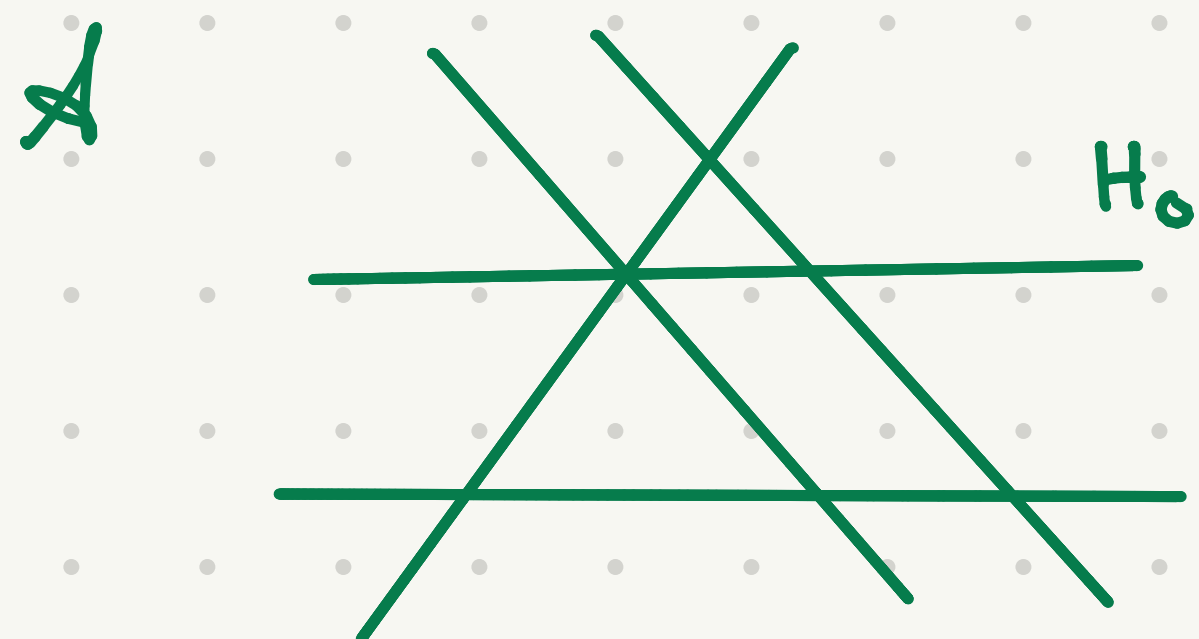
$$\mathcal{A}_x := \{ H \in \mathcal{A} \mid x \subseteq H \text{ (ovvero } H \leq x) \} \subset V$$

$$\mathcal{A}^x := \{ H \cap x \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x, x \cap H \neq \emptyset \} \subset x$$

Vediamo una costruzione particolare.

Sia $H_0 \in \mathcal{A}$. Chiamo $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H_0\}$ e $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$.

ESEMPIO



Diciamo che $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ è una TRIPLA di ARRANGIAMENTI.

— • —

► REGIONI

Sia V sp vett reale e $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ tripla. Allora

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$$

$$b(\mathcal{A}) = \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}'') & \text{se } rk(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}') \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

DM.

Notiamo che $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + \# \text{ regioni di } \mathcal{A} \text{ tagliate da } H_0$

Vediamo che $\{ \text{regioni tagliate da } H_0 \} \xrightarrow{1:1} \mathcal{A}''$

$$R' \longmapsto R' \cap H_0$$

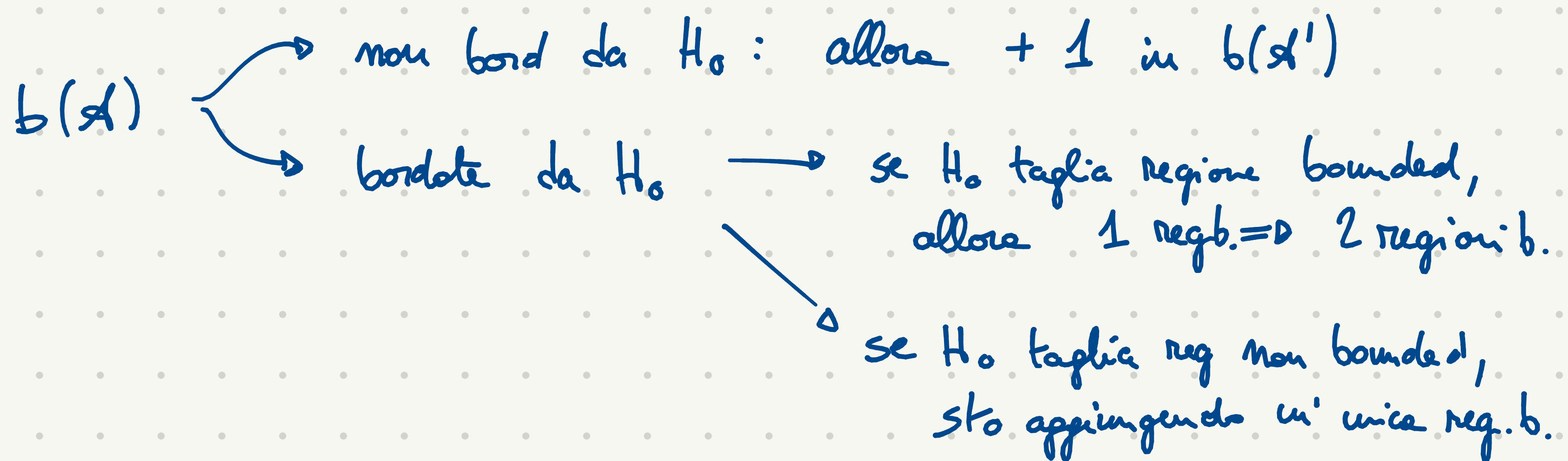
$$R' \longleftarrow R''$$

(regione in cui cade R'')

Vediamo cosa succede nel caso bounded.

OSS: se $rk(A) = rk(A') + 1$ allora non ci sono reg. rel. limitate,
| altrimenti non si sarebbe abbassato il rango.

Se $rk(A) = rk(A')$ allora ho 2 tipologie:



Sommando i contributi delle casistiche

$$b(A) = b(A')_{\text{non}} + (b(A')_{\text{TH}_0} + b(A'')_{\text{BOUND}}) + b(A'')_{\text{NON BOUND}}$$

OBIETTIVO: mostrare che $\chi_A(t) = \chi_{A'}(t) - \chi_{A''}(t)$.

Ricordo $\chi_A(t) = \sum_{x \in L(A)} \mu(x) \cdot t^{\dim x}$.

① Sia $(P, \leq)$ poset. Siano $x, y \in P$,

• $z \in P$ e' UPPER BOUND se $\begin{cases} z \geq x \\ z \geq y \end{cases}$.

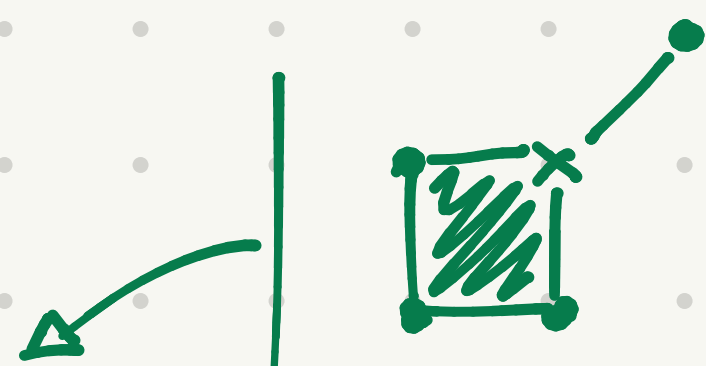
• $z \in P$ e' JOIN se $\forall z'$ upper bound x, y , $z \leq z'$: $z =: x \vee y$

• Analogo per LOWER BOUND e MEET. $z =: x \wedge y$

Diciamo che $(P, \leq)$ e' RETICOLO se $\forall x, y \in P$ esistono JOIN e MEET.

E' un JOIN/MEET-SEMIRETICOLO se $\forall x, y \in P$ esiste nisp JOIN/MEET.

► ESEMPIO



Definiamo $(P, \leq)$ con $P = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a, b \leq 1\} \setminus \{(1, 1)\} \cup \{(a, a) \mid 1 < a \leq 2\}$.

Consideriamo allora $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2$.

OSS: $(1, 0)$ e $(0, 1)$ non ammettono JOIN.

LEMMA

per $\mathcal{P}$ esempio si vede che non si estende il risultato.

Sia $\mathcal{P}$ finito. Vale che:

- ① se $\mathcal{P}$ è meet-reticolo ed $\exists! \hat{1}$ elemento massimale allora $\mathcal{P}$ reticolo.
- ② se $\mathcal{P}$ è join-reticolo ed $\exists! \hat{0}$ elemento minimale allora $\mathcal{P}$ reticolo.

PROPOSIZIONE

• Si vede che $L(\mathcal{A})$ è meet-semireticolo.

• $L(\mathcal{A})$ è reticolo $\iff \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$

• $\forall x \leq y$ in $L(\mathcal{A})$, $[x, y]$ è un reticolo.

DM.

Si dimostra che $L'(\mathcal{A}) = \begin{cases} L(\mathcal{A}) & \text{se } \bigcap H \neq \emptyset \\ L(\mathcal{A}) \cup \{\emptyset\} & \text{altrimenti} \end{cases}$ è join-semireticolo. $\square$

CROSSCUT THEOREM

Es: $X = \{\text{atomi di } L\}$.

Sia L reticolo finito ($\exists! \hat{0}, \hat{1}$). Sia $X \subseteq L$ tale che:

$$\hat{0} \notin X \quad \text{e} \quad \forall y \in L, y \neq \hat{0} \quad \exists x \in X \text{ t.c. } x \leq y.$$

Chiamiamo $\forall k \geq 0$ intero, definiamo:

$$N_k(X) := \# \text{"sottoinsiemi di } X \text{ con } k \text{ elementi t.c. join} = \hat{1} \text{"}$$

$$\text{Allora } \mu_L(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_k (-1)^k N_k(X).$$

Sia L ret. finito e $\mathbb{K}$ campo. Definiamo:

$\parallel A(L) :=$ algebra di Möbius = algebra di semigrupp di $(L, \overset{\text{join}}{\vee})$ su $\mathbb{K}$.

Dati $\ell, \ell' \in L$ indicheremo quindi $\ell \ell' = \ell \vee \ell'$. INV. MÖB $x = \sum_{y \geq x} \sigma_y$

Sia $x \in L$. Definiamo allora $\sigma_x := \sum_{y \geq x} \mu(x, y) y \in A(L)$.

Claim: $\{\sigma_y\}_{y \in L}$ è base di $A(L)$ con elementi idempotenti ($\sigma_x^2 = \sigma_x$)
e ortogonali ($\sigma_x \sigma_y = \delta_{xy} \sigma_x$).

DIM: costruiamo un'altra algebra: $A'(L)$ K -alg con base $\{\sigma'_x\}_{x \in L}$ come spazio vettoriale, tale che $\sigma'_x \sigma'_y = f_{xy} \sigma'_x$. Dimostriamo $A'(L) \cong A(L)$.

tramite la mappa $x \in L \mapsto x' := \sum_{y \geq x} \sigma'_y$.

• verifichiamo che è algebra ovvero $x'y' = (xy)'$.

• è bigettiva per Möbius Inversion.

$\Rightarrow$ è iso di ALG e $A(L) \cong \bigoplus_{x \in L} K \sigma_x$. □

Per ogni $x \in X$ $\hat{0} - x = \sum_{y \geq \hat{0}} \sigma_y - \sum_{y \geq x} \sigma_y = \sum_{y \not\geq x} \sigma_y$

ma ora

$$\prod_{x \in X} (\hat{0} - x) = \sum_{\substack{y \in L \\ \nexists x \in X \text{ s.t. } y \geq x}} \sigma_y \stackrel{(\text{def di } X)}{=} \sigma_{\hat{0}}$$

Vediamo il coefficiente di $\hat{1}$ nel prodotto.

RHS: $\mu(\hat{0}, \hat{1})$

LHS: $\sum_k (-1)^k N_k(X)$ per definizione. $\Rightarrow$ Tesi.

► ESEMPIO

Sia $(L, \leq) = (\mathcal{P}[n], \subseteq)$ e $X = \{\text{atomi}\} = \{\text{singoletti}\}$.

Allora $N_k(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ 1 & \text{se } k = n \end{cases}$ da cui $\mu_L(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^n$.

► TEOREMA di WHITNEY

Sia A un e allora vale che:

$$\chi_A(t) = \sum_{\substack{B \subseteq A \\ \bigcap_{B \in \mathcal{H}} B \neq \emptyset}} (-1)^{\#B} t^{n - \text{rk}(B)} \quad \text{dove } n = \dim V.$$

• DIM.

Osserviamo che per def di A_x : $\mu(\hat{0}, x) = \mu_{L(A_x)}(\hat{0}, x)$.

Ma ora $L(\mathcal{A}_x) = [\hat{0}, x]$ è finito, quindi reticolo su cui applicare il Crosscut Thm. Segue che

$$\mu_{L(\mathcal{A}_x)}(\hat{0}, x) = \sum_k (-1)^k \underbrace{N_k(\mathcal{A}_x)}_{\substack{\text{n° sottoinsiemi di } \mathcal{A}_x \text{ di } k \text{ elementi dove} \\ \text{il join è } x}} = \sum_k (-1)^k \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \cap H = x \\ |\mathcal{B}| = k}} 1$$

Ora riscrivendo $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ si conclude con veloci osservazioni. ■

Dimostriamo ora

$$\| \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t) \quad \text{DELETION - RESTRICTION}$$

Usiamo Whitney:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) + \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ H_0 \in \mathcal{B} \\ \cap H \neq \emptyset \\ \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} \quad (*)$$

Per ogni $\mathcal{B}$ nella sommatoria, sia $\hat{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \setminus \{H_0\})^{H_0} \subseteq \mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$.

Questa però non è bigezione, non è iniettiva: $\left[\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right]_{H_0} : \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \mapsto \text{uguali}$

Fissiamo $\mathcal{B}$. Quali $\mathcal{C}$ sono tali che $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{C}}$?

Sia $\hat{\mathcal{B}} = \{H_1, \dots, H_k\}$ iperp di H_0 . Così $\#\hat{\mathcal{B}} = k$.

Per $i=1, \dots, k$ sia $c_i := \#\{H \in \mathcal{A} \mid H \cap H_0 = H_i\} \geq 1$.

Per $\mathcal{C}$ vanno scelti iperpiani proprio in questi insiem.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \\ \cap H \neq \emptyset \\ H_0 \in \mathcal{C} \\ \hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{B}}}} (-1)^{\#\mathcal{C}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{C})} &= \sum_{i_1=1}^{c_1} \dots \sum_{i_k=1}^{c_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + 1} t^{n-1 - \text{rk}(\hat{\mathcal{B}})} \binom{c_1}{i_1} \dots \binom{c_k}{i_k} \\ &\quad \left(\text{rk } \mathcal{C} = \text{rk } \hat{\mathcal{C}} + 1 = \text{rk } \hat{\mathcal{B}} + 1 \right) \\ &= - \left(\sum_{i_1=1}^{c_1} (-1)^{i_1} \binom{c_1}{i_1} \right) \dots \left(\sum_{i_k=1}^{c_k} (-1)^{i_k} \binom{c_k}{i_k} \right) t^{n-1 - \text{rk } \hat{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

Quindi dividendo Σ in $(*)$ per i possibili $\hat{\mathcal{B}}$ si $\overset{=1}{\text{conclude}}$. ■

TEOREMA di ZASLAVSKI

Questo seminario si concentrerà sulla dimostrazione del Teorema di Zaslavski: dalla primo incontro ci è stato presentato un problema a cui rispondere: come contare le regioni / bounded dell'arrangiamento? Una prima risposta viene data dal seguente:

► TEOREMA Zaslavski:

Sia $\mathcal{A}$ un arrangiamento in $\mathbb{R}^n$ e $\chi_{\mathcal{A}}$ il suo polinomio caratteristico.

Allora:

$$\begin{cases} r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) & \textcircled{a} \\ b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1) & \textcircled{b} \end{cases}$$

• DIM 1

Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una triple, ovvero dato $H_0 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{H_0}$ e $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$.

① Ricordiamo la relazione ricorsiva sulle regioni:

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$$

e dal Lemma di Deletion-Restriction:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Siccome $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ arrangiamenti di $\mathbb{R}^n$ mentre $\mathcal{A}''$ di $H_0 \simeq \mathbb{R}^{n-1}$:

$$r(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) \quad \text{rispettano la stessa ricorsione}$$

e nei casi base:

$$\chi_{\emptyset}(t) = t^n \Rightarrow (-1)^n \chi_{\emptyset}(-1) = 1 = r(\emptyset) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{b} \text{ Poniamo } d(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1). \quad \begin{matrix} \text{(relat. bound)} \\ 1 \\ \parallel \end{matrix}$$

Come prima, per $\mathcal{A} = \emptyset$ si vede subito che $d(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})$.

Vediamo che d, b soddisfano la stessa ricorrenza:

$$b(\mathcal{A}) = \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}'') & \text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') \\ 0 & \text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1 \end{cases}$$

Ci sono allora 2 casi:

- $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') = \text{rk}(\mathcal{A}'') + 1$: allora segue subito che

$$d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}') + d(\mathcal{A}''), \text{ come } b(\mathcal{A}).$$

- $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1$: vediamo che c'è un isomorfismo di posets:

$$\begin{array}{ccc} L(\mathcal{A}') & \xrightarrow{\sim} & L(\mathcal{A}'') \\ R & \longmapsto & R \cap H_0 \end{array}$$

dove va controllato che $R \cap H_0 \neq \emptyset \forall R$. $\leftarrow \otimes I$

Allora $\chi_{\mathcal{A}'} = \chi_{\mathcal{A}''}$ e questo conclude. $\square$

• DIM 2

Introduciamo la CARATTERISTICA DI EULERO $\Psi(\Delta)$ per Δ topologico.

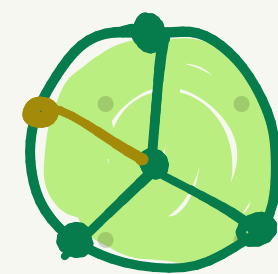
Supponiamo di aver decomposto^(*) Δ in celle, f_i i -celle per ogni dimensione i . Allora:

$$\Psi(\Delta) := f_0 - f_1 + f_2 - \dots$$

(*) Vedremo nel nostro caso
| non ci sono problemi!

non dipende dalla decomposizione in celle scelta.

ESEMPIO Disco



► DEF. Faccia di $\mathcal{A}$ arrangiamento

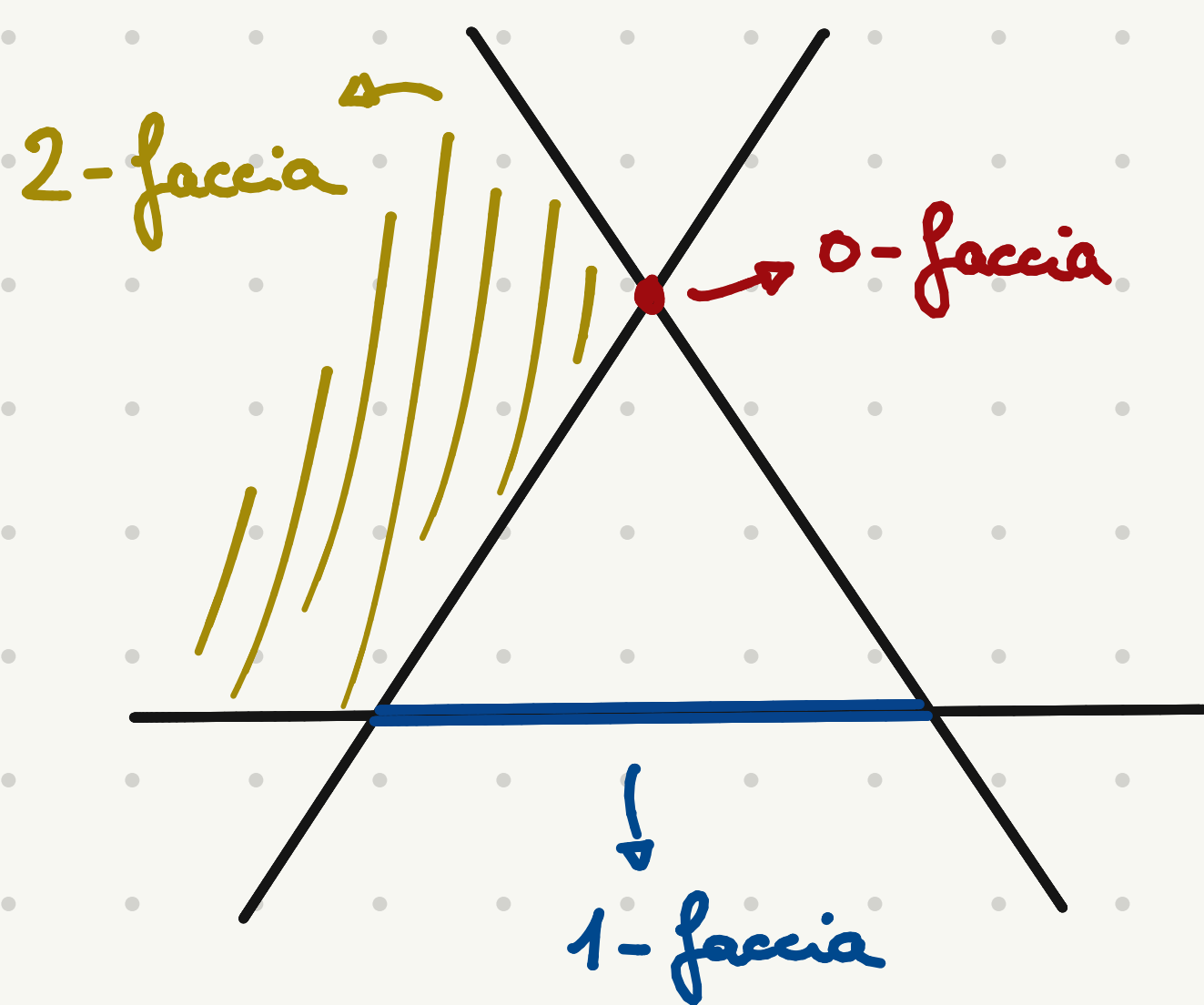
Sia $\mathcal{A}$ arrangiamento di iperpiani. Una FACCIA di $\mathcal{A}$ è:

$$\emptyset \neq F = \overline{R} \cap x \text{ per } x \in L(\mathcal{A}) \text{ ed } R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}).$$

Denotiamo $\tilde{F}(\mathcal{A})$ insieme delle facce e $\dim F := \dim(\text{aff}(F))$.

Inoltre sia $\text{relint}(F) := \overset{\circ}{F}$ in $\text{aff}(F)$.

► ESEMPIO



Contiamo allora:

$$f_0 = 3 \quad f_1 = 3 \quad f_2 = 1$$

per cui si ottiene

$$\chi(\mathbb{R}^2) = 3 - 3 + 1 = 1.$$

$$\text{In generale } \chi(\mathbb{R}^n) = (-1)^n.$$

Osserviamo due cose:

$$1) \text{ vale che } \mathbb{R}^n = \coprod_{F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})} \text{relint}(F)$$

2) per ogni $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ esiste un unico $x \in L(\mathcal{A})$ tale che F sia una regione di x .

$$\text{Si ottiene che: } f_k(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ \dim(y) = k}} r(\mathcal{A}^y)$$

da cui troviamo la relazione:

$$(-1)^n = \chi(\mathbb{R}^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_k = \sum_{y \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim y} r(\mathcal{A}^y)$$

che più in generale si può riscrivere:

$$(-1)^{\dim(x)} = \chi(x) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ y \geq x}} (-1)^{\dim y} r(\mathcal{A}^y)$$

$$\text{e usiamo inversione di Möbius } f(x) = \sum_{y \geq x} g(y) \Rightarrow g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) f(y)$$

per ottenere che:

$$(-1)^{\dim x} r(\mathcal{A}^x) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ y \geq x}} (-1)^{\dim y} \mu(x, y)$$

e per $x = \mathbb{R}^n$:

$$(-1)^n r(\mathcal{A}) = \sum_{y \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim y} \mu(y) = \chi_{\mathcal{A}}(-1).$$

Questo conclude (a).

Per il risultato (b) l'argomentazione è simile, lavorando con $\Gamma = \text{supp}(\tilde{F}_b(A))$ invece di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo senza perdita di generalità che A essenziale, siccome: $b(A) = b(\text{ess}(A))$ e

$$\chi_A(t) = t^{\dim(A) - \dim(\text{ess } A)} \chi_{\text{ess}(A)}(t).$$

Si dimostra che $\Psi(\Gamma) = 1$. $\leftarrow \otimes \mathbb{I}$

Allora come sopra, le facce bounded sono una decomposizione di Γ :

$$\begin{aligned} 1 = \Psi(\Gamma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{y \in L(A) \\ \dim y = k}} (-1)^k b(A^y) \\ &= \sum_{y \in L(A)} (-1)^{\dim y} b(A^y) \end{aligned}$$

Dato che $\Psi(\Gamma \cap A^x) = 1$, si generalizza:

$$1 = \Psi(\Gamma^x) = \sum_{\substack{y \in L(A) \\ y \geq x}} (-1)^{\dim y} \cdot b(A^y)$$

Möbius Inversion $\left\{ \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right.$

$$(-1)^{\dim(x)} b(A^x) = \sum_{y \geq x} (1) \cdot \mu(x, y)$$

Da cui per $x = \mathbb{R}^n$, siccome A^x essenziale e $\dim(x) = \text{rk}(A^x)$:

$$b(A) = (-1)^{\text{rk}(A)} \sum_{y \in L(A)} \mu(\hat{0}, y) = (-1)^{\text{rk}(A)} \chi_A(1).$$

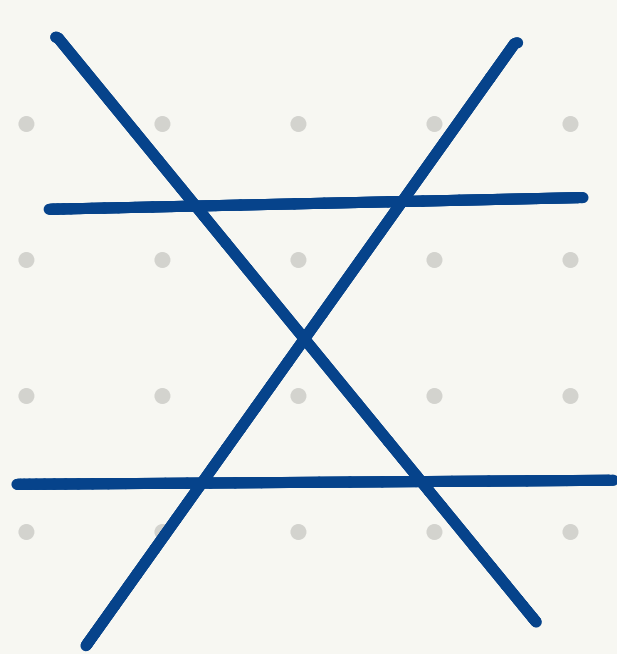
Si passa a $\text{rk}(A)$ perché soddisfa la relazione nel caso non essenziale.

► Corollario

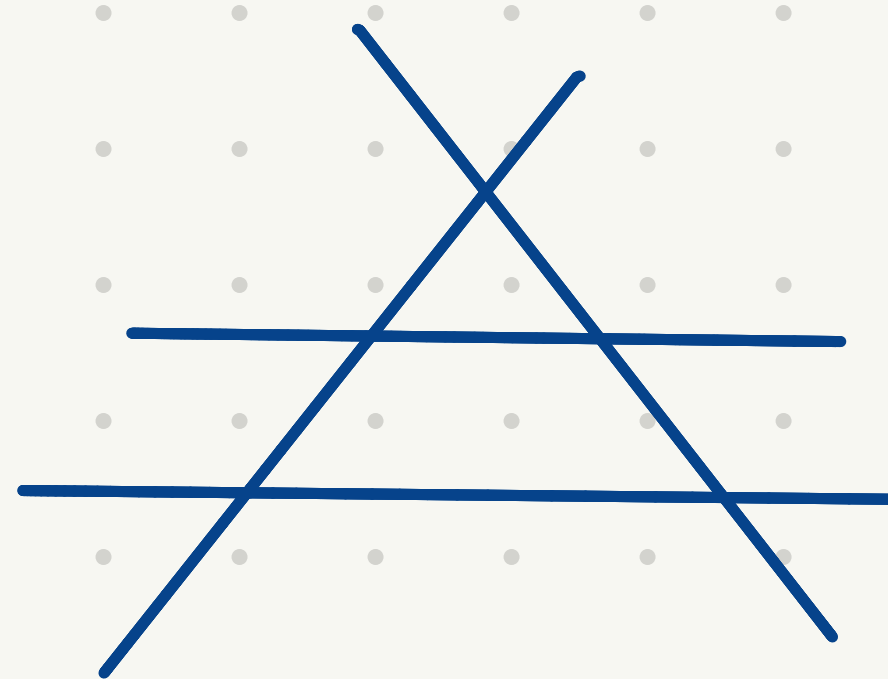
I numeri $r(A)$ e $b(A)$ dipendono soltanto da $L(A)$.

► ESEMPIO

Consideriamo:



e



hanno stesso intersection poset, quindi stessi $r(A)$ e $b(A)$.

Calcoliamo $r(\mathcal{A})$ e $b(\mathcal{A})$ per alcune famiglie di arrangiamenti.

• ARRANGIAMENTO in POSIZIONE GENERALE

Un arrangiamento $\mathcal{A}$ in posizione generale in $\mathbb{R}^n$ è tale che:

$$\begin{cases} p \leq n \Rightarrow H_{i_1, n} \cap \dots \cap H_{i_p} \neq \emptyset \\ p > n \Rightarrow H_{i_1, n} \cap \dots \cap H_{i_p} = \emptyset \end{cases}$$

cioè non ci sono iperpiani "paralleli" o "intersezioni triple".

In questo caso $L(\mathcal{A})$ ha una forma specifica. Se $|\mathcal{A}| = m$ allora c'è una corrispondenza:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_m^n &:= \{P \subseteq [m] \mid \#P \leq n\} && \xleftrightarrow{1:1} L(\mathcal{A}) \\ &\{i_1, \dots, i_p\} && \longleftrightarrow H_{i_1, n} \cap \dots \cap H_{i_p} \end{aligned}$$

dove $\mathcal{B}_m^n$ è l'algebra booleana troncata con inclusione " $\subseteq$ ".

Ricordiamo dalle puntate precedenti che $\mu(S) = (-1)^{\#S} \forall S \in \mathcal{B}^n$.

Quindi, siccome $[\hat{0}, x]_{\mathcal{B}_n} \cong [\hat{0}, x]_{\mathcal{B}_m^n}$ si ottiene che:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) &= \chi_{\mathcal{B}_m^n}(t) = \sum_{S \in \mathcal{B}_m^n} (-1)^{\#S} t^{n-\#S} \\ &= t^n - \binom{m}{1} t^{n-1} + \binom{m}{2} t^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

Segue dal Thm di Zaslavski:

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{n}.$$

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1) = (-1)^n \left[1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^n \binom{m}{n} \right]$$

$$\text{III} \otimes \text{---} \Big| = \binom{m-1}{n}$$



► ARRANGIAMENTO LINEARE

Consideriamo delle forme lineari affini: sia $v = (v_1, \dots, v_n)$ e K campo:

$$L_1(v) = a_1, \dots, L_m(v) = a_m$$

dove supponiamo che $a_1, \dots, a_m \in K$ siano **GENERICI** ovvero:

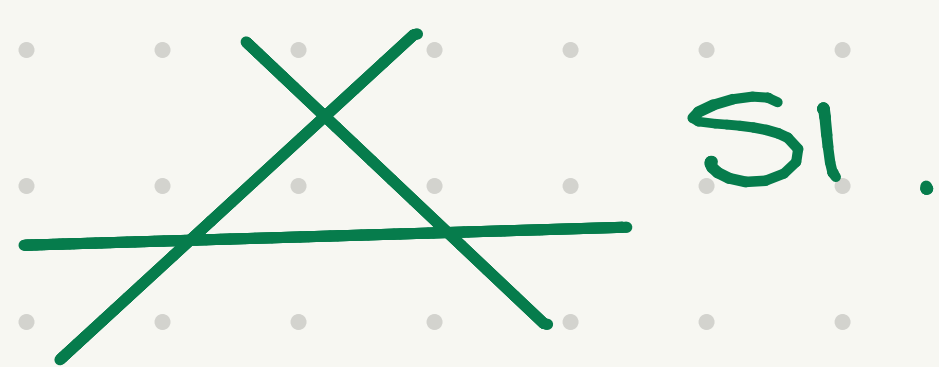
$$L_{i_1}, \dots, L_{i_p} \text{ lin. indep.} \iff H_{i_1, n} \cap \dots \cap H_{i_p, n} \neq \emptyset$$

dove $H_i = \ker(L_i(v) - a_i)$.

ESEMPIO

Supponiamo $K = \mathbb{R}$. Se $L_1, \dots, L_m$ sono forme lineari razionali allora $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ indipendenti su $\mathbb{Q} \Rightarrow a_1, \dots, a_m$ generici.

Visivamente:



Come nel precedente esempio, se $x = H_{i_1, n} \cap \dots \cap H_{i_k, n}$ allora $[\hat{O}, x]_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{B}_k$. Quindi $\mu(x) = (-1)^k$. Segue che

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \#\mathcal{B}}$$

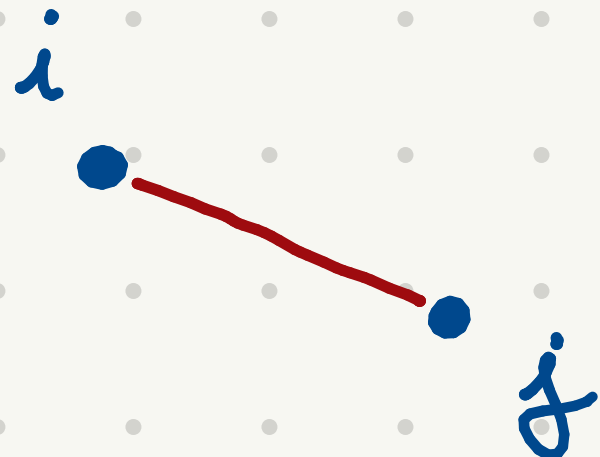
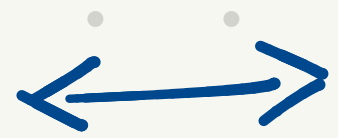
dove $\mathcal{B}$ varia tra gli insiemi indipendenti $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

► CASO SPECIALE: Generic Arrangement

Per $1 \leq i, j \leq n$ consideriamo le forme lineari $x_i - x_j = a_{ij}$ tali che $i \neq j$ e $\{a_{ij}\}$ generici. Questo arrangiamento è il **GENERIC BRAID ARRANGEMENT** $\mathcal{G}_n$.

Visualizziamo

H_{ij}



per ottenere così un grafo

semplice. Gli insiemi $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}_n$

indipendenti sono esattamente gli alberi.

⊛
I $\text{rk}(A) = \text{rk}(A') + 1$: dimostriamo che

$$L(A') \cong L(A'')$$

$$R \mapsto R \cap H_0$$

Siccome $L(A)$ reticolo, gli elementi massimali hanno tutti grado massimo, diciamo d . Siccome tolto H_0 il rango si abbassa, ogni elem. massimale si scrive come $H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_d}$ e H_0 è sempre tra questi iperpiani. (*)

Siano $R, S \in L(A')$, $R \neq S$:

• se $R \subseteq S$ o $S \subseteq R$: allora per dimensione anche con nH_0 vale,

• altrimenti: $R = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p}$ e $S = H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_q}$, esiste

H_j t.c. lin. indep. da $H_{i_1}, \dots, H_{i_p} \Rightarrow$ se $R \cap H_0 = S \cap H_0$ allora $H_j \subseteq R \cap H_0$
 $R \cap H_0 \stackrel{\text{dim}}{=} R \cap H_j \Rightarrow$ non vale (*)

Questo dimostra l'irriducibilità. La surgettività segue subito dal

fatto che dato $x \in L(A'')$ allora $x = H_0 \cap H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_d}$

per cui con $R = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_d}$ concludo.

⊛
III
$$(-1)^n \left[1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \right] \stackrel{?}{=} \binom{n-1}{n}$$

Usiamo il fatto che $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1}$: la somma

segnata diventa telescopica. OK!

⊛
II Vedere che $\Psi(\Gamma) = 1$, dove $\Gamma = \text{supp}(\tilde{F}_b(A))$.

Sappiamo che

$$\begin{aligned} (-1)^n &= \Psi(R^n) = \sum_{R \in \mathcal{F}(A)} \dim_{\text{aff}}(R) = \sum_{R \in \mathcal{F}_b(A)} \dim(R) + \sum_{R \in \mathcal{F}_n(A)} \dim(R) \\ &= \Psi(\Gamma) + \sum_{R \in \mathcal{F}_n(A)} \dim_{\text{aff}}(R) \end{aligned}$$

Supponiamo $\mathcal{A}$ essenziale. Allora $\forall R \in \mathcal{F}_n(\mathcal{A})$, $\text{lin}(R) = \{0\}$ perché altrimenti $\mathcal{A}$ non sarebbe essenziale: tutti gli iperpiani di $\mathcal{A}$ sarebbero "paralleli" a $\text{lin}(R)$.

Siccome $R \in \mathcal{F}_n(\mathcal{A})$, R è un cono poliedrale (in particolare convesso). Dato che $\mathcal{A}$ è finito, Γ limitato.

Segue che esiste $r \gg 0$ tale che $\Gamma \subseteq B(0, r)$ e $B(0, r)$ interseca tutti gli iperpiani di $\mathcal{A}$.

Consideriamo allora $rS^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Intersecando rS^{n-1} con $\mathcal{F}_n(\mathcal{A})$ si trova una corrispondenza 1:1 tra

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(\mathcal{A}) &\xleftrightarrow{1:1} \{ \text{divisione } rS^{n-1} \text{ in celle} \} \\ R &\longleftrightarrow rS^{n-1} \cap R \end{aligned}$$

nelle quale ogni faccia ha dimensione $\dim_{\text{aff}}(R) - 1$.

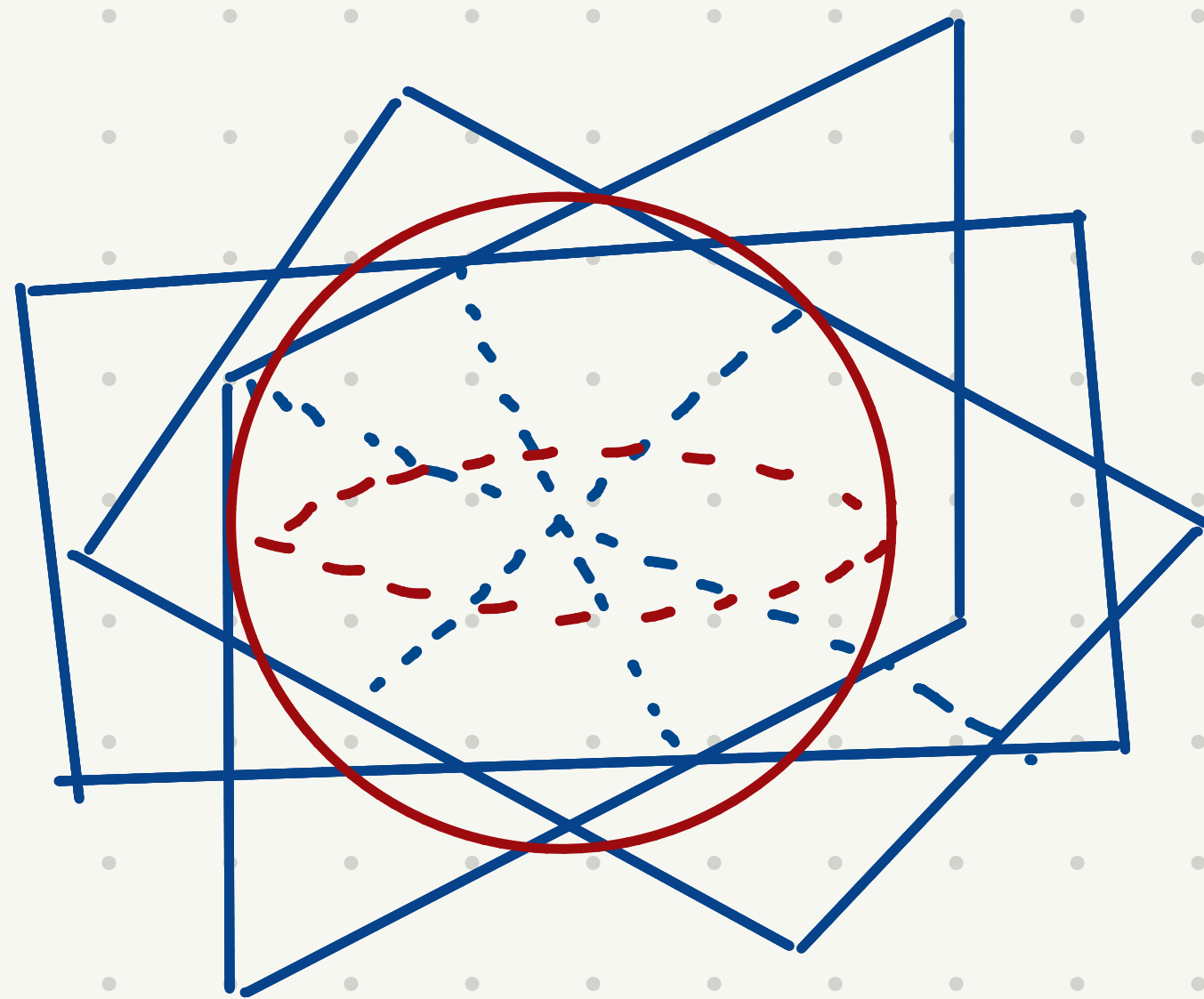
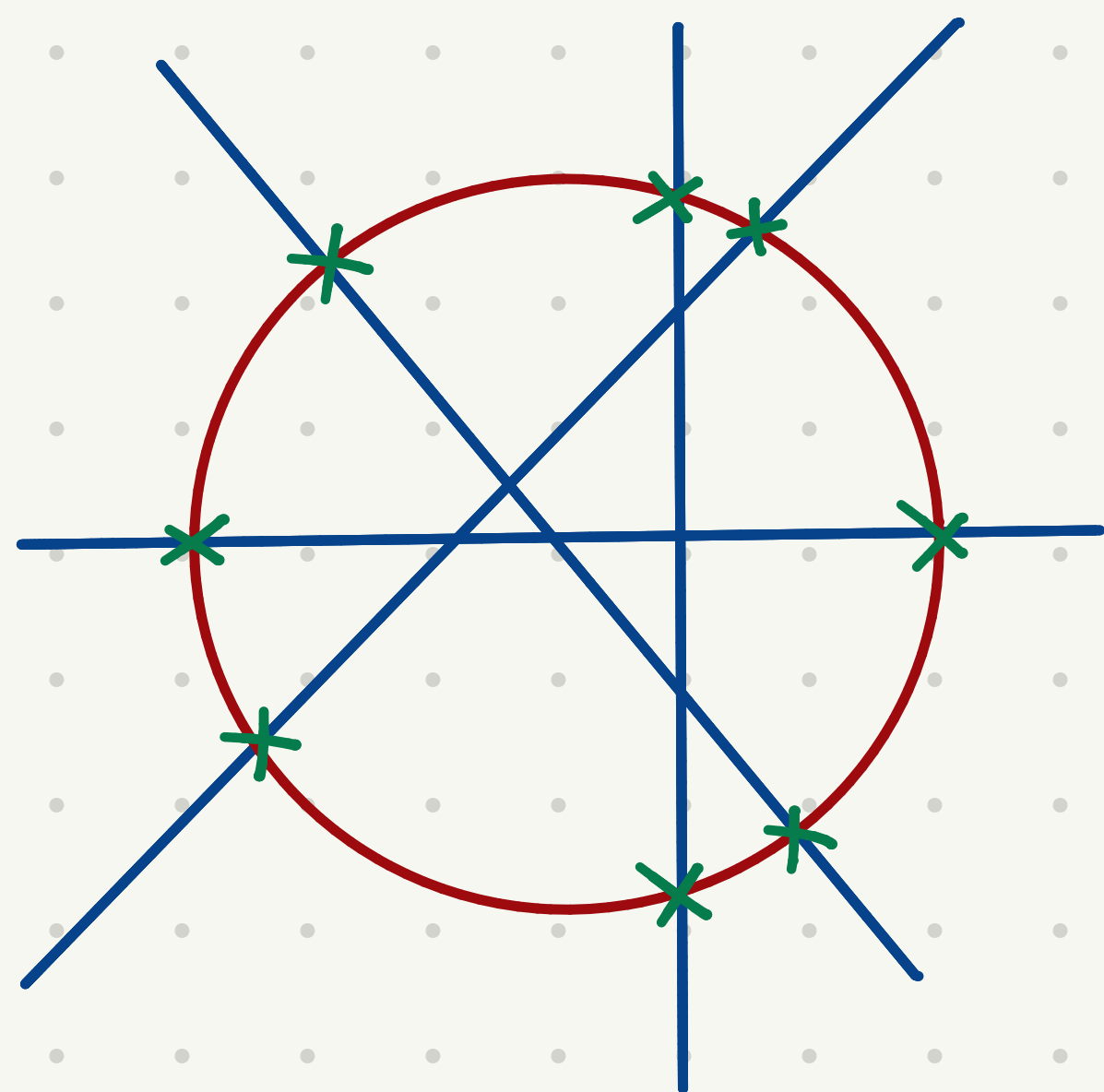
Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{R \in \mathcal{F}_n(\mathcal{A})} (-1)^{\dim_{\text{aff}}(R)} &= - \sum_{F = rS^{n-1} \cap R} (-1)^{\dim_{\text{aff}}(F)} = -\Psi(rS^{n-1}) \\ &= -\Psi(S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Segue che

$$\Psi(\Gamma) = (-1)^n + \Psi(S^{n-1}) = 1 \quad \text{come volevamo.} \quad \square$$

Idea:



ARRANGIAMENTI GRAFICI

Ricordiamo:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{x \in L(\mathcal{A})} t^{\dim x} \cdot \mu(x)$$

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) \quad \text{e} \quad b(\mathcal{A}) = (-1)^{rk \mathcal{A}} \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

Parliamo di grafi.

► DEF. Grafo

Sia $G = ([n], E(G))$ GRAFO SEMPLICE, cioè al più 1 edge tra due nodi.

Si può allora definire q-COLORAZIONE di G grafo con $q \geq 1$ come $k: [n] \rightarrow [q]$. Essa è PROPRIA se:

$$\forall (i, j) \in E(G) \quad k(i) \neq k(j).$$

► DEF. Polinomio Cromatico

$$\chi_G(q) := \# \text{ q-colorazioni proprie di } G.$$

► ESEMPIO

K_n = "grafo completo su $[n]$ ", allora $\chi_{K_n}(q) = q(q-1)\dots(q-n+1)$.

$\chi_G(q)$ è un polinomio perché fissato $c_i := \#$ i-color. proprie surgettive, allora $\chi_G(q) = \sum_{i=1}^n \binom{q}{i} c_i$ polinomio, monico di grado n .

► ESEMPLI: ... intuizione di del/contraction!

► DEF. Arrangiamento Grafico.

Sia G grafo. Definiamo

$$\mathcal{A}_G := \{ H_{ij} = \{x_i = x_j\} \mid (i, j) \in E(G) \} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Si ottiene il seguente Teorema:

► TEOREMA

Vale che $\chi_{\mathcal{A}_G}(t) = \chi_G(t)$.

Ricordiamo Deletion-Restriction, ovvero se $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H_0\}$ e $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Il Teorema allora si dimostra vedendo che la stessa relazione si ottiene usando G grafo e $G - e$, G/e con $e \in E(G)$.

Così facendo, abbiamo la corrispondenza $e \mapsto H_e \in \mathcal{A}_G$ che implica

$$\mathcal{A}_{G-e} \cong \mathcal{A}_G \setminus \{H_e\} = \mathcal{A}'_G \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{G/e} \cong \mathcal{A}_G^{H_e} = \mathcal{A}''_G.$$